

۱- آشنایی با طراحی آزمایشها

هدف مهندسی کیفیت، بهبود کیفیت کالاها و خدمات است. در صنعت نیز تحقق برنامه‌های تولید و کنترل هزینه‌ها یک عامل مهم قلمداد می‌شود. برنامه‌های بازرسی طرقی وقت‌گیر و گران برای دستیابی به اطلاعات فرآیند می‌باشند. طراحی آزمایشها ابزاری مناسب برای دستیابی به درک صحیحی از فرآیند و با هزینه‌ای کم می‌باشند. بسیاری شرکتها هزینه زیادی صرف جمع‌آوری اطلاعات فرآیند می‌کنند. آنها امیدوارند که اطلاعات مزبور برای رفع مشکلات سیستمهای جاری و برای توسعه سیستمهای جدید و تولید مؤثر واقع شوند. تمایز عمده‌ای بین داده‌های فرآیند و اطلاعات آن وجود دارد. جهت استخراج اطلاعات از داده‌ها می‌بایستی فرضیات مناسبی از فرآیند در اختیار داشت. بعبارت دیگر یک مدل ساخته می‌شود. دو مشخصه اصلی در اطلاعات سنواتی حاصل از فرآیند مشاهده می‌شوند:

- ۱) اگر تغییر در ورودی فرآیند با تغییر در خروجی همراه شود، نمی‌توان نتیجه گرفت که ضرورتاً تغییرات ورودیها باعث تغییر خروجی هستند.
 - ۲) در مطالعات اطلاعات سنواتی، تفکیک اثرات ورودیها روی خروجیها غیرممکن است. مطالعات حوزه طراحی آزمایشها با معضلات فوق روبرو نیستند. تحلیل اطلاعات سنواتی فرآیند یک رویکرد غیرفعال است. درحالیکه آزمایشهای طراحی شده مستقیماً به ارزیابی ورودیهای فرآیند می‌پردازد.
- منطق طراحی آزمایشها بعنوان ابزاری برای تصمیم‌گیریها در سه حوزه قرار می‌گیرد:
- ۱) آزمایشها به ارزیابی فعال فرآیند می‌پردازند. تنها طریق برای دانستن چگونگی اثرات یک ورودی بر روی خروجی، تغییر دادن آن است.
 - ۲) آزمایشهای طراحی شده اصلی متوسط گیری را بکار می‌گیرند، که در واقع نوسانات در اطلاعات مندرج را کاهش می‌دهد.
 - ۳) با یک رویکرد طراحی آزمایشها، می‌توان همزمان بیش از یک جنبه از یک سیستم را ارزیابی کرد.

۱-۱- عوامل سازمانی در مطالعات فرآیندها

دستیابی به حمایت‌های مدیریت

نتیجه اکثر مطالعات فرآیندی به تصمیمی مبنی بر تغییر جنبه‌ای از سیستم منتهی می‌شود و برای ایجاد تغییر به تأیید مدیریت نیاز است. اصولاً غافلگیری مدیریت در تصمیم‌گیریها مفهومی ندارد. لذا یک پروژه موفق بهبود فرآیند از ابتدا به حمایت مدیریت احتیاج دارد. در بسیاری محیطهای صنعتی، به مجوزهای خاصی برای تنظیم فرآیند جهت یک آزمایش نیاز داریم. طبیعتاً فعالیت از فرآیندهای مهم شروع می‌شود.

تشکیل تیم بررسی فرآیندها

حمایت مدیریت برای موفقیت کافی نیست. می‌بایستی تیم معینی تشکیل شود. اصولاً هنگامی که به افراد در تصمیم‌گیریها نقشهایی واگذار می‌گردد، بهتر و فعالتر عمل می‌کنند. کسی که مسئول فرآیند مورد مطالعه است ضرورتاً می‌بایستی در تیم حضور داشته باشد. افراد تیم می‌توانند از حوزه‌های مختلف باشند. عضویت اپراتور سیستم در تیم بدلیل اطلاعات وی از فرآیند پیشنهاد می‌شود.

ارتباطات

جلسات منظم برای حفظ تیم و بهره‌مندی از تفکر گروهی لازم است. توجه به اصولی همانند انتخاب یک رهبر و یک دبیر برای تیم ضرورت دارد. همچنین تشکیل جلسات به موقع، برنامه‌ریزی و دستور جلسات و بهره‌گیری از توفان ذهنی توصیه می‌شوند. طراحی آزمایشها در واقع یک تکنولوژی همواره به راه‌حلها منتهی نمی‌شود. مردم راه‌حلها را خلق می‌کنند. برای کسب موفقیت، همراه داشتن حمایت مدیریت و ایجاد گروه فرآیندی همکار مهم است.

تصدیق اجرای آزمایشها

انجام آزمایشها جزئی از مطالعه می‌باشند که می‌بایستی اطمینان حاصل شود که هر اجرای آزمایش منطبق با آزمایش طراحی شده می‌باشد. خصوصاً لازم است تصدیق تنظیمات ورودی فرآیندها در هر اجرای آزمایش انجام پذیرد.

۲-۱- استراتژی طراحی آزمایشها

یک ارزیابی بر مبنای DOE دارای ۶ مرحله است. هر مرحله به اطلاعات عوامل متبلی نیاز دارد. این مراحل عبارتند از:

تحلیل فرآیند (Process Analysis)، انتخاب طرح (Choosing a Design)، انجام آزمایشها (Performing the Runs)، تحلیل داده‌ها (Analyzing the Data)، استخراج نتایج (Drawing Conclusions) و پیگیری نتایج با مطالعات بعدی یا تغییر فرآیند (Following Up).

۱-۲-۱- تحلیل فرآیند (Process Analysis)

در مرحله تحلیل فرآیند، می‌بایستی مسئله واقعی را به یک مسئله طراحی آزمایشها (DOE) تبدیل کرد. در این مرحله از بررسی، مهندسی کیفیت همانندیک کاشف عمل می‌کند هدف

از تحلیل فرآیند جمع‌آوری تمام اطلاعات در مورد سیستم برای طراحی یک آزمایش است. در انتهای این مرحله، مهندس کیفیت فاکتورهای که می‌بایستی ارزیابی شوند (ورودیها) و پاسخهایی که مهم هستند را مشخص می‌کند. همچنین اطمینان از کامل بودن درک فرآیند ضروری می‌نماید.

اینکار شامل ۵ فعالیت می‌شود:

۱) انتخاب فاکتورهای مطالعه (ورودیهای سیستم)

ابتدا فاکتورهای مورد علاقه را مشخص کنید. می‌توان با کمک یک دیاگرام علت و معلول این کار را انجام داد. در یک مطالعه اولیه معمولاً تعداد فاکتورهای زیادی مطرح هستند. نتیجه این نوع مطالعه در مرحله اول، حذف عوامل کم‌اثر می‌باشد. در بررسی تکمیل عوامل مؤثر مورد توجه خواهند بود. سطح‌بندی عوامل در مطالعه می‌توانند مورد توجه باشند. برای انتخاب یک طرح متناسب برای موقعیت مورد مطالعه می‌بایستی اطلاعاتی را در مورد ورودیهایی که می‌خواهیم ارزیابی نماییم جمع‌آوری کنیم. اطلاعاتی که در این مورد جمع‌آوری می‌شوند در شفافیت‌بخشی به مسئله کمک می‌نمایند.

نقش عوامل

نقش، جزیی از فاکتور است که در آماده‌سازی آزمایش دیده می‌شود. ۶ نوع نقش برای عوامل مطرح می‌شود:

۱- عوامل کنترل (Control Factors)

ورودیهای فرآیند هستند که تمایل به کنترل آنها در تولید داریم. فاکتورهای کنترل معمولاً ساده و کم‌خرج تغییر می‌یابند. مهندسين تولید سطح فاکتورهای کنترل را برای تنظیم خروجی فرآیند می‌توانند تغییر دهند.

۲- عوامل اغتشاش (Noise Factors)

این فاکتورها در طول آزمایش کنترل می‌شوند، اما اجازه داده می‌شود که بصورت نرمال در تولید تغییر یابند. کنترل فاکتورهای Noise غالباً دشوار است. تغییرات این فاکتورها می‌تواند به Noise در پاسخ منجر شود. یکی از اهداف آزمایشهایی که با فاکتورهای Noise سر و کار دارند، کاهش تغییرات مزبور است.

۳- عوامل حساسیت (Sensitivity Factors)

برخی مواقع هیبریدهایی (Hybrids) بین فاکتورهای کنترل و Noise وجود دارند. این فاکتورها در محدوده کوچکی تغییر می کنند.

۴- عوامل بلوکی (Blocking Factors)

این فاکتورها لزوم انجام آزمایش بصورت گروهی مربوط می شوند. فرض کنید مواد اولیه برای سیستم مورد بررسی از یک فرآیند دسته‌ای (Batch) تهیه می شود. فرض کنید مثلاً فاکتورهای دیگر یکسان باشند و دسته‌های مختلف تولید منجر به سطوح مختلفی از پاسخ شوند. دسته تولیدی یک فاکتور بلوکی است.

۵- عامل تصادفی (Random Factor)

این فاکتور لزوماً به یک کنترل در آزمایش منجر نمی شود. اگر مقدار یک فاکتور تصادفی در اجرای آزمایش ثبت شود، می توان آنرا در تحلیل بکار بست. معمولاً حضور این فاکتور منجر به پیچیدگی تحلیل می شود.

۶- عامل فرمولاسیون (Formulation Factor)

این فاکتور یک مؤلفه از یک اختلاط است که بصورت درصد بیان می شوند.

انواع عوامل

بطور کلی فاکتورها به دو نوع تقسیم می شوند: فاکتورهای کیفی و فاکتورهای کمی فاکتورهای کیفی معمولاً سطح بندی می شوند، ولی فاکتورهای کمی با کمک اعداد و واحد معینی قابل شناسایی هستند.

Limits

فرض کنید برای انجام یک فرآیند اپراتورهای زیادی بتوانند فرآیند را انجام دهند اما در یک مطالعه فقط احمدی و اکبری در نظر گرفته شدند. احمدی و اکبری سطوح فاکتور نامیده می شوند. برای فاکتورهای کمی، ترجیحاً محدوده‌ای را برای تغییرات تعریف می کنیم.

۲) انتخاب پاسخ‌هایی که باید اندازه‌گیری شوند (خروجیهای سیستم)

پاسخها در واقع خروجیهایی هستند که در یک آزمایش مشاهده می شوند. اغلب کمی کردن خروجی یک آزمایش دشوار است و مثلاً از ۰ و ۱ به معنای خوب و بد استفاده می شود. این

امر قدرت طرح را برای شناسایی اثر یک تغییر بشدت کاهش می‌دهد. باید سعی نمود که خروجیها در یک مقیاس پیوسته معرفی شوند. یک طریق برای اینکار اندازه‌گیری عاملی مرتبط با خروجی است. ولی به هر حال در صورت مواجهه با شرایطی که پاسخ بصورت باینری است می‌توان با تکرار آزمایش به خروجی معینی دست یافت (مثال سکه). نکته بسیار مهم ثبت خروجیهایی است که مستقیماً و یا مستقیماً (ولی با ارتباط قوی) با مواردی نظیر کیفیت، بهره‌وری و اثربخشی مرتبط می‌شوند.

۳) تصمیم‌گیری در خصوص تلفیق پاسخهای تکی و چگونگی تلفیق آنها

غالباً اتکاء به پاسخهای منفرد، خروجی مناسبی برای تحلیل نمی‌باشند. بعبارتی تلفیق نتایج و مثلاً یافتن میانگین (Average) و یا میانه (Medium) برای تحلیل مناسبتر می‌باشند. تلفیق اطلاعات و دستیابی به نتایج تجمعی به ساده‌سازی تحلیل می‌انجامد. مواردی نظیر میانگین و میانه در واقع به تلفیق نتایج حول مرکز پاسخها نیز منجر می‌شوند. از طرفی انطباق خروجی فرآیند با هدف، کیفیت نمی‌کند. زیرا اگر با اغتشاش مواجه باشیم، این خود نوعی پاسخ است که باید مورد تحلیل قرار گیرد (تاگوچی 1986) فرض کنید در یک فرآیند رولینگ ورقهای فلزی، می‌خواهیم ضخامت ورق در اندازه خاصی باشد. حتی اگر ورق بطور متوسط ضخامت مورد نیاز را داشته باشد، ممکن است ضخامت آن در سرار سطح یکنواخت نباشد. این نکته یک اغتشاش را نشان می‌دهد. چگونه می‌توان یک اغتشاش را اندازه گرفت؟ ابتدا پاسخ چندین مرتبه اندازه‌گیری خواهد شد. در واقع در چندین محل باید ضخامت را اندازه گرفت تا بتوان گستره (Spread) مقادیر پاسخ را یافت. یکی از طرق محاسبه گستره تعیین برد (Range) یعنی تفاضل پاسخ ماکزیمم و پاسخ می‌نیمم است. همچنین محاسبه (Inter - Quartile Range) IQR یعنی تفاضل صدکهای هفتادوپنجم و بیست‌ونجم پیشنهاد می‌شود. محاسبه انحراف معیار نیز یک طریق عالی برای توصیف اغتشاش در یک پاسخ است. اگر بتوانیم اغتشاش را در پاسخها اندازه‌گیری کنیم، می‌توان بر شرایطی متمرکز شد که حداقل اغتشاش را داشته باشیم.

۴) تصمیم‌گیری در خصوص لزوم انجام آزمایش بصورت اجراهای گروهی

دلایل گوناگونی وجود دارند که یک آزمایش بصورت گروهی انجام شود. مثلاً فرآیندی که محصول بصورت دسته (Batch) تولید می‌شود را در نظر بگیرید. اگر تمام عوامل ثابت بمانند و دسته تولیدی تغییر کند، سطح پاسخ ممکن است تغییر کند. دسته تولیدی در مبحث حاضر بصورت یک بلوک در نظر گرفته می‌شود. شاید تغییر رطوبت بعنوان یک عامل در اجرای یک آزمایش میسر نباشد. ولی انجام آزمایش روی یک بلوک در اجراهای مختلف در

یک روز بارانی و همین آزمایش در اجراهای مختلف در یک روز خشک، یک بررسی بلوکی نامیده می‌شود.

در مرحله تحلیل فرآیند، درک گروهی انجام دادن آزمایش مهم است. اگر تغییر دسته تولیدی به تغییر سطح پاسخ می‌انجامد، باید آزمایش بلوکی شود. ساختار آزمایشهای بلوکی شده به تحلیل‌گر اجازه می‌دهند که اثرات سطوح مختلف فاکتور بلوکی را از اثرات سایر فاکتورها جدا نماید.

۵) تعیین فرم عمومی مدل ریاضی که بهترین نحو فرآیند را توصیف نماید

یک مدل تقریبی از واقعیت است. در مبحث DOE، یک مدل فرمولی ریاضی است که ورودیهای سیستم را به خروجیهای آن مرتبط می‌کند. لذا انتخاب یک طرح خاص بدین معنا است که یک مدل متناسب با آن فرآیند مورد نظر تعیین نموده‌ایم. سه مدل رایج Linear Additive، Interactions، Full Quadratic هستند.

مدل خطی جمعی (Linear Additive)

این حالت ساده‌ترین مدل را ارائه می‌کند. اگر یک مدل برای ورودی خاصی خطی باشد، یک واحد تغییر در ورودی همان تغییر را در خروجی پدید می‌آورد (صرف نظر از ورودیها). مدل‌های خطی و جمعی دارای این خاصیت هستند که اگر دو ورودی همزمان تغییر یابند، اثر تغییرات روی خروجی جمع اثرات انفرادی خواهد بود.

مدل تأثیر متقابل (Interaction Model)

در بسیاری حالات، مقدار تغییر در خروجی برای یک واحد تغییر در یک ورودی، به مقدار ورودی دیگر بستگی دارد. این اثر تأثیر متقابل نامیده می‌شود.

مدل کوادراتیک (Quadratic Model)

برخی مواقع تغییر یک ورودی، اثر معینی روی پاسخ دارد ولی با تداوم تغییر ورودی، خروجی به همان میزان تغییر نمی‌کند. مدل‌های کوادراتیک چنین ارتباطی بین عوامل و پاسخها را نشان می‌دهند.

فرمول مدل (The Model Formula)

در زیر مدل کوادراتیک کامل برای سه فاکتور دیده می‌شود. در سمت چپ معادله پاسخ قرار دارد. چهار جمله اول عبارات ثابت و مدل جمعی هستند. سطر دوم نشانگر سه تأثیر متقابل بین

عوامل و بصورت زوجی است و سطر سوم فرم کوادراتیک را پدید می‌آورد. ضرایب b نامعلوم هستند. از جنبه ریاضی هدف از آزمایش تعیین مقادیر b می‌باشد.

$$\begin{aligned} \text{پاسخ پیش‌بینی شده)} &= b_0 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 \quad (\text{عبارت خطی}) \\ &+ b_4 f_1 f_2 + b_5 f_1 f_3 + b_6 f_2 f_3 \quad (\text{عبارت اندرکنش یا تأثیر متقابل}) \\ &+ b_7 f_1^2 + b_8 f_2^2 + b_9 f_3^2 \quad (\text{عبارت کوادراتیک}) \end{aligned}$$

مقدار عوامل سه‌گانه f_3, f_2, f_1

۱-۲-۲- انتخاب طرح (Choosing a Design)

مرحله بعد مطالعه انتخاب طرحی است که اطلاعات حاصل از تحلیل فرآیند را بکار بندد. معیارهای مهمی برای انتخاب یک طرح وجود دارد که وابسته به شرایط حاکم بر مسئله مطرح می‌شوند. برخی از این معیارها در یک حالت ناسازگار نسبت به یکدیگر قرار می‌گیرند. کلیه موفقیت در کاربردهای صنعتی DOE دانستن قوت و ضعف هر نوع طرح می‌باشد.

انطباق مدل با طرح

طرح آزمایش و مدل، ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند. معمولاً به دو علت طرح آزمایش با مدل نامتناسب است:

الف) طرح آزمایش دارای اجراهای کافی برای انطباق با مجهولات مدل نیست. مثلاً اگر با یک عامل مواجه باشیم و بخواهیم یک خط را با عامل فوق انطباق دهیم به دو نقطه احتیاج داریم ولی اگر بخواهیم یک سهمی را انطباق دهیم به سه نقطه (سه اجرای آزمایش) نیاز داریم در غیر این صورت طرح آزمایش و مدل متناسب نیستند.

ب) طرح آزمایش در مقایسه با ضرورت انطباق با مدل دارای سطوح بیشتری است. لذا مسئله دارای یک اعوجاج می‌شود. در این حالت از مدل‌های بیشتر و یا نقاط کمتر (پاسخهای آزمایش) استفاده می‌شود.

مشخصه‌های طرح آزمایش (Design Characteristics)

برای هر موقعیت لزوماً یک طرح وجود ندارد. ولی انتخاب طرح مناسب نکته مهمی است. چهار مشخصه کلیدی برای یک طرح آزمایش عبارتند از:

تعداد Balance، تکرار Replication، کارآیی Efficiency و فقدان انطباق Lack of Fit

توازن (تعداد) (Balance)

هر فاکتور در یک آزمایش دارای تعدادی چیدمان می‌باشد. یک آزمایش وقتی متعادل می‌شود که هر چیدمان برای هر عامل برابر با تعداد چیدمانهای عوامل دیگر باشد. به شکل زیر توجه شود:

		Factor 1			f_1	f_2	f_3
		-1	0	1			
Factor 2	-1	-1	1	0	-1	-1	-1
	0	1	0	-1	-1	0	1
	1	0	-1	1	-1	1	0
مقادیر فاکتور سوم در خانه‌ها قرار دارند				0	-1	1	0
Latin Square Design				0	0	0	0
				0	1	-1	-1
				1	-1	0	0
				1	0	-1	-1
				1	1	1	1

هر عامل سه سطح دارد. هر سطح از هر فاکتور دقیقاً یکبار با هر سطح از بقیه دیده می‌شود. طرحهای متعادل مطلوب می‌باشند زیرا تقارن ساختار آنها به تحلیلهای ساده‌تر نیاز دارد.

تکرار (Replication)

یک طرح از نوع تکرارپذیر است اگر حداقل یکی از اجراهایش تکرار شود. هدف از تکرار اندازه‌گیری Noise است. اختلاف بین پاسخهای مشاهده شده برای یک شرایط آزمایشی تکراری، در واقع اندازه‌گیری Noise است. بدون تکرار، نمی‌توانیم مدل را در خصوص فقدان انطباق ارزیابی کنیم.

کارآیی (Efficiency)

مقدار اطلاعات هر اجرای آزمایش، معیاری از کارآیی طرح می‌باشد. اطلاعات یک طرح در ارتباط مستقیم با مدل است. در بسیاری طرحها، کارآیی خاصیت عمده‌ای است.

فقدان انطباق (Lack of Fit)

اختلاف بین مدل تقریبی حاصله و واقعیت، فقدان انطباق نامیده می‌شود. محققین علوم آماری دو رویکرد را برای حفاظت از فقدان انطباق مطرح می‌کنند:
 الف) انجام اجراهای ویژه‌ای از آزمایش که فقدان انطباق را تشخیص دهد.
 ب) رویکرد دوم توسعه طرحهایی است که فقدان انطباق را به حداقل رساند.

انواع طرحهای آزمایش (Design Types)

طرحهای فاکتوریل کامل (Full Factorial Design)

طرحهای فاکتوریل کامل ساده‌ترین طرحها هستند. در این طرحها، هر سطح از هر فاکتور با هر سطح از عوامل دیگر در چند اجرا ظاهر می‌شود. به شکل زیر توجه شود که یک فرم فاکتوریل 2×2 است.

				Factor 1	Factor 2
Factor 2	1	•	•	-1	-1
	-1	•	•	-1	1
		-1	1	1	-1
		Factor 1			

سطح پایین فاکتور اول با هر دو سطح فاکتور دوم مطرح می‌شود و بر عکس. لذا تعداد اجرای آزمایش در طرح فاکتوریل کامل مشخص است. (حاصل ضرب مطرح عوامل)

فاکتوریل دو سطحی (Two - Level Factorial)

طرحهای فاکتوریل وجود دارند که در آن هر فاکتور فقط در دو سطح ظاهر می‌شوند. اگر یک فاکتور کمی باشد، در هر اجرا فقط در سطح پایین (Low) یا بالا (High) قرار می‌گیرد. جدول زیر بیانگر تعداد اجراها در ازاء تعداد فاکتورها در این نوع مطرح می‌باشد.

تعداد فاکتورها	تعداد اجراها
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128

این طرحها، مدلهایی با عبارات خطی و هر ارتباط متقابل ممکنه بین ترکیبات عوامل را شامل می‌شوند. در فاکتوریل 2^4 ، 4 عبارات خطی، 6 ارتباط متقابل 2 عاملی، 4 ارتباط متقابل 3 عاملی و ارتباط متقابل 4 عاملی دیده می‌شود. توجه شود که 16 اجرا به دنبال آن 16 اثر وجود خواهد داشت. غالباً محققین فرض می‌کنند که ارتباط متقابل 3 و 4 عاملی خفیف بوده و لذا آنرا بعنوان معیاری برای Noise بکار می‌بندند.

فاکتوریلهای سه سطحی (Three - Level Factorials)

در این طرحها هر فاکتور دارای سه سطح است. برای فاکتورهای کمی در هر اجرای آزمایش، سه سطح بالا (High)، متوسط (Medium) و پایین (Low) وجود خواهد داشت. بنابراین تعداد اجراها در یک طرح فاکتوریل سه سطحی سریعتر از طرحهای فاکتوریل دو سطحی افزایش می‌یابد. مدلهای کوادراتیک انطباق مناسبی با طرحهای سه سطحی دارند.

فاکتوریل با سطوح مرکب (Mixed - Level Factorial)

در این طرحها فاکتورها دارای سطوح متفاوتی هستند. این حالت اغلب هنگامی رخ می‌دهد که از فاکتورها کیفی باشد.

طرحهای فاکتوریل جزئی (Fractional Factorial Designs)

طرحهای فاکتوریل کامل پرخرج هستند زیرا عملاً جهت ایجاد تعادل در طرح، تعداد اجراها زیاد است. طرحهای فاکتوریل جزئی، انتخاب مناسب زیرمجموعه‌ای از طرحهای فاکتوریل کامل سروکار دارند. مثلاً فرض کنید در یک طرح فاکتوریل 2^4 به جای 16 اجرا، 8 اجرای آزمایش مورد توجه باشند به نحوی که حداکثر اطلاعات ممکنه حاصل آید.

طرحهای آزمایش بهینه (Optimal Designs)

لفظ بهینه برای یک طرح آزمایش به معنای بهترین طرح می‌باشد. در یک طرح وجود سه عامل از قبل موجود، یعنی: اندازه نمونه (Sample Size)، مدل و منطقه قبول (Region of Interest)، بر کیفیت و کارکرد طرح مؤثر هستند.

اندازه نمونه (Sample Size)

تعداد اجرای آزمایش از قبل مشخص می‌شود. تعداد اجراها، معیاری برای هزینه یک طرح است و نه کیفیت آن.

مدل

مدل نیز از قبل مشخص می‌شود. به اهمیت انطباق مدل و طرح قبلاً اشاره شد.

منطقه قبول (Region of Interest)

هر مدلی دارای حدودی در خصوص قابلیت آن می‌باشد. می‌بایستی از قبل اندازه منطقه قبول هر فاکتور معین شود. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم دانسیته آب مایع را به صورت تابعی از دما و فشار مدل کنیم. حد عملی برای انتخاب دما و فشار که در آن آب در حالت مایع باشد، وجود دارد.

۱-۲-۳- انجام آزمایشها (Performing the Runs)

مرحله بعدی اجرای طرح می‌باشد. برای اینکار معمولاً یک کاربرگ (work Sheet) تهیه می‌شود. در کاربرگ تمام تنظیمات لازم برای اجرای آزمایش نوشته می‌شود. در این برگ محلی برای ثبت مقادیر پاسخهای هر اجرا لحاظ می‌شود. در این برگ نحوه آزمایش یعنی مرتبه اجرای آزمایش درج شده است.

۱-۲-۴- تحلیل داده‌های آزمایش (Analyzing Experimental Data)

آزمایشهای طراحی شده، تحلیل داده‌ها را به سادگی میسر می‌سازند. تحلیل اطلاعات دارای چند گام به شرح زیر است:

- ۱) دستیابی به اطلاعات: در این مرحله داده‌ها در قالب جداول و اشکالی ارائه می‌شوند.
- ۲) انطباق مدل: در این مرحله معادلات ریاضی که فاکتورها را به پاسخها مرتبط می‌کنند پدید می‌آیند.
- ۳) ارزیابی مدل: در برخی موارد بنظر می‌رسد که برخی عبارات مدلها، غیر ضروری هستند. تکنیکهایی وجود دارند که بر مبنای آنها می‌توان عمل نمود.
- ۴) بررسی انتقادی: تمامی مدلها بر مبنای فرضیاتی در خصوص فرآیند، پایه‌ریزی می‌شوند. تحلیلهایی که میزان انحراف از فرضیات مزبور را نشان می‌دهند در این مرحله مطرح می‌شوند.

۵) بهبود مدل: اگر مفروضات مدل، اعتبار لازم را ندارند، از ابزارهای بهبود مدل برای تصحیح مسئله استفاده خواهد شد.

۱) دستیابی به اطلاعات

هدف از این مرحله توصیف (Describe) داده‌ها و نه تفسیر (Interpret) آنها می‌باشد. در واقع می‌بایستی ارتباطات بین عوامل (Factors) و پاسخها و هرگونه مشاهدات مشکل‌ساز و غیرعادی را کشف و شناسایی نمود.

۲) ارزیابی مدل

وقتی طرح آزمایش پایه‌ریزی می‌شود، عملاً آنرا با مدلی در ذهن انجام می‌دهیم. ممکن است مدل مزبور دارای عباراتی غیرضروری باشد. تعد از اجرای آزمایش و داشتن داده‌هایی در دست می‌توانیم مدل را ارزیابی و در خصوص عبارات مهمتر تصمیم‌گیری نماییم. استفاده از مدل‌های ساده کاملاً توصیه می‌شود. زیرا علاوه بر سهولت در درک کنترل تعداد عوامل کمتر، ساده و دقیق‌تر قابل انجام است. در صورت حذف برخی عبارات در مدلها اغتشاش کمتری در قبال مجهولات خواهیم داشت.

۳) تکنیکهای ساده‌سازی

می‌بایستی تمام عبارات غیرمهم را حذف و صرفاً عبارات مهم را در مدل نگه داشت. برای این منظور روشهای مختلفی وجود دارد. یک روش Subset Regression است. در این رویکرد، یک عبارت از مدل حذف و مقدار اغتشاش سنجیده می‌شود. در نهایت عبارتی که اغتشاش کمتری دارند باقی نگه‌داشته می‌شوند.

۴) بررسی انتقادی مفروضات

در جهان واقعی تمام فرآیندها دارای تغییرات و یا اغتشاش هستند. Model Diagnosis یک فرآیند ارزیابی است که بررسی تأمین مفروضات مدل توسط داده‌های آزمایش می‌پردازد.

مفروضات در مورد اغتشاش

الف) مقدار اغتشاش در یک اجرا، ربطی به مقدار Noise اجرای دیگر ندارد. (فرض استقلال در Noise)
ب) مدل احتمال یکسانی برای هر اجرای آزمایش بکار بسته شود. (بررسی رفتار Noise میسر می‌شود).

ج) مقدار اغتشاش بستگی به چیدمان و تنظیمات عوامل و یا اندازه پاسخ ندارد. در بسیاری موارد، اغتشاش بصورت درصدی از مقدار پاسخ اندازه گیری می شود. حداقل مربعات روشی است که اکثر کتب و نرم افزارها آنرا برای تعیین مجهولات مدل بکار می گیرند. تخمینهایی برای مجهولات صورت می گیرد که مجموع مربعات، انحرافات بین پاسخ مشاهده شده و پاسخ پیش بینی شده، حداقل می شود. اگر مفروضات مدل صحیح باشند، تخمینهای مجهولات حداقل اغتشاش را نشان خواهند داد. مفروضات مدل همواره صحیح نمی باشند. یک ابزار رایج برای همین مسئله تحلیل باقی مانده ها است. یک باقیمانده، اختلاف بین یک پاسخ مشاهده شده و پاسخ پیش بینی شده از مدل است. برای هر اجرای آزمایش یک باقی مانده متناظر وجود دارد. در واقع باقیمانده های می بایستی نشان دهنده اغتشاش باشند و نه یک رفتار سیستماتیک.

۵) بهبود مدل

چنانچه مفروضات مدل نقض شده باشد می بایستی بهبود مدل صورت پذیرد. تخمینهای روش حداقل مربعات وقتی که مفروضات صحیح باشند، دارای حداقل Noise هستند.

۵-۲-۱- استخراج نتایج (Drawing Conclusions)

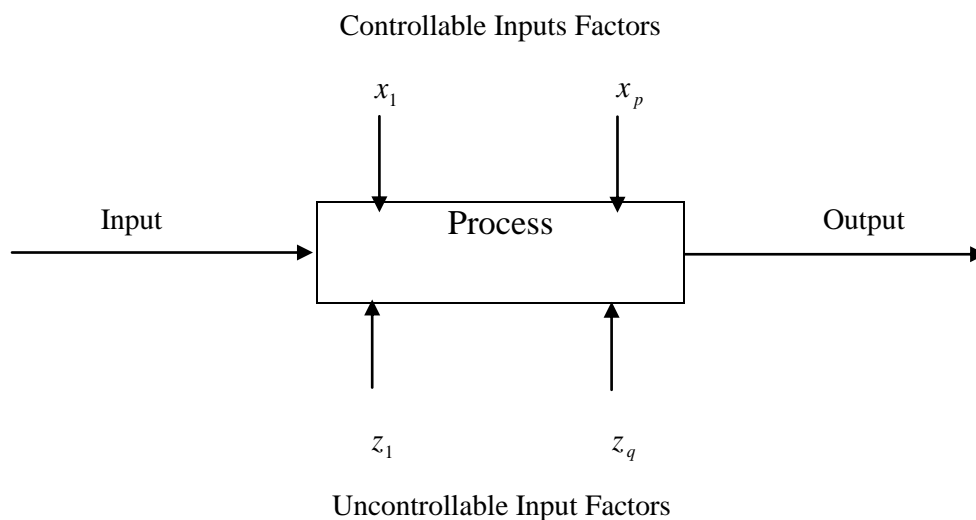
وقتی که تحلیل داده ها پایان یابد، به مدلی دست یافته ایم که می توان از آن برای تصمیم گیری در مورد سیستم یا فرآیند استفاده نمود. گاهی هدف از یک مطالعه تعیین حالت شرایط بهتر کارکرد بصورت مقایسه وقتی یافتن مقدار بهتر بودن (یا بدتر بودن) است. با شناسایی ضرایب مرتبط با عوامل می توان پیش بینی هایی را نیز انجام داد. در بسیاری موارد مدیریت علاقمند به تبدیل تحلیلهای فوق بصورت تحلیلهای اقتصادی است.

۶-۲-۱- پیگیری

در بسیاری حالات، نتایج آزمایشها، سئوالات جدیدی را بدنبال دارند. لذا توالی از آزمایشها برای نیل به نتایج مؤثرتر پیشنهاد می شوند.

۲- تکنیکهای طراحی آزمایشها

همانگونه که در قسمت قبل اشاره شد طراحی آزمایشها در برگیرنده یک آزمایش یا سریهایی از آزمایشات است که با تغییر در متغیرهای ورودی فرآیند، به تحلیل تغییرات حاصله در پاسخ خروجی فرآیند میپردازد. خروجی یک فرآیند ممکن است دارای یک یا چند مشخصه باشد. از سوی دیگر ممکن است برخی متغیرهای فرآیند مانند X_1, X_2, \dots, X_p قابل کنترل و سایر آنها Z_1, Z_2, \dots, Z_q غیرقابل کنترل هستند. (البته ممکن است آنها در شرایط آزمایش قابل کنترل باشند). این عوامل غیرقابل کنترل، همان عوامل اغتشاش (Noise) میباشند.



شکل ۱- تشریح یک فرآیند

در تکنیکهای طراحی آزمایش موضوعاتی نظیر موارد زیر مطرح می‌شوند:

- ۱) تعیین متغیرهای کنترلی که بیشترین اثر را بر روی پاسخ خروجی دارند.
- ۲) تعیین مقادیر متغیرهای قابل کنترلی که بیشترین اثر را روی پاسخ خروجی دارند، بگونه‌ای که تغییرات در خروجی کوچک و یا نزدیک مقدار اسمی خود قرار گیرد.
- ۳) تعیین مقادیر قابل کنترل ورودی، بگونه‌ای که اثرات متغیرهای غیرقابل کنترل ورودی، حداقل شود.

۲-۱- آزمایشهای تک عاملی (Single Factor Experiments)

ساده‌ترین نوع تکنیک‌های طراحی آزمایش، در حالت تک عاملی مطرح می‌شوند.

مثال ۱:

یک تولید کننده لاستیک بدنبال بهبود توان کششی یکی از محصولات است. در فرآیند فعلی به میزان ۱۰٪ از ماده MK3 استفاده می‌شود. در این حالت میانگین توان کششی لاستیک 15Psi است. با توجه به نمودارهای کنترل زیر فرآیند تحت کنترل می‌باشد.

نمودار

اعتقاد بر این است که توان کششی تابعی از میزان ماده MK3 است که در این صورت با افزایش MK3 توان کششی افزایش می‌یابد. پس از بررسی‌های بعمل آمده مشخص می‌شود که میزان ماده MK3 در محصول مورد بررسی بین ۵ الی ۲۰ درصد است. مهندسیین تولید بررسی را بر روی چهار حالت متفاوت از مقدار MK3 به میزان ۵ ، ۱۰ ، ۱۵ و ۲۰ درصد معطوف می‌کند.

در ازاء هر حالت ۶ نمونه تهیه می‌شود. در مجموع ۲۴ نمونه تهیه و توان کششی اندازه‌گیری می‌شود.

جدول ۱- اطلاعات مثال (۱)**مشاهدات**

درصد MK3	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع کل	میانگین
۵	۷	۸	۱۵	۱۱	۹	۱۰	۶۰	۱۰
۱۰	۱۲	۱۷	۱۳	۱۸	۱۹	۱۵	۹۴	۱۵/۶۷
۱۵	۱۴	۱۸	۱۹	۱۷	۱۶	۱۸	۱۰۲	۱۷

۲۰	۱۹	۲۵	۲۲	۲۳	۱۸	۲۰	۱۲۷	۲۱/۱۷
							۳۸۳	۲۱/۹۶

این مثال یک آزمایش تک عاملی، کاملاً تصادفی با چهار سطح برای عامل مورد نظر می‌باشد. هر سطح دارای شش مشاهده (تکرار) است. بمنظور تحقق یک حالت منصفانه در آزمایش، لازم است نمونه‌ها بصورت کاملاً تصادفی باشند. در این مرحله از یک نمودار جعبه‌ای استفاده می‌شود تا تغییرات توان کششی در ازاء هر سطح از مقدار ورودی (عامل) نشان داده شود.

۲-۲- آنالیز واریانس (ANOVA)

آنالیز واریانس یک طرفه One - Way ANOVA

فرض کنید یک عامل دارای m سطح مختلف باشد و می‌خواهیم آنها را با یکدیگر مقایسه نماییم. هر پاسخ در هر سطح از عامل یک متغیر تصادفی را تشکیل می‌دهد.

جدول ۲ - نمایش اطلاعات اولیه در یک تحلیل واریانس یک طرفه

Factor Level	Observation		Total	Averages
1	y_{11}	$y_{12} \dots y_{1n}$	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	$y_{22} \dots y_{2n}$	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m	y_{m1}	$y_{m2} \dots y_{mn}$	$y_{m.}$	$\bar{y}_{m.}$
			$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

در جدول فوق y_{ij} مقدار مشاهده شده نام برای سطح نام عامل مورد بررسی است. بطور کلی می‌توان نوشت:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (1)$$

μ = پارامتر مشترک برای همه سطوح می‌باشد که میانگین کلی نامیده می‌شود.

τ_i = پارامتر مربوط به سطح نام عامل (اثر نام عامل)

ε_{ij} = مقدار خطا

در آنالیز واریانس فرض می‌شود که خطاهای مدل دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشند و همچنین واریانس برای تمام سطوح عامل ثابت منظور می‌گردد.)

باید توجه داشت که m سطح عامل مورد مطالعه را به دو طریق می‌توان انتخاب کرد.

۱- سطوح عامل توسط آزمایش کننده انتخاب گردند. در این صورت می‌توان فرضیه‌های را در مورد τ_i آزمایش کرد و نتایج فقط برای سطوحی که در آنالیز در نظر گرفته‌ایم معتبر هستند. این حالت به نام مدل اثرات ثابت (Fixed Effects Model) شناخته می‌شود.

۲- M سطح مورد نظر می‌تواند یک نمونه تصادفی از یک جامعه بزرگتر باشد. در این حالت می‌خواهیم نتایج حاصل که براساس نمونه بدست آمده‌اند را به کلیه سطوح عامل مورد مطالعه در جامعه تعمیم دهیم. در این حالت τ_i ها متغیر تصادفی هستند و فرضیه‌هایی در مورد تغییرپذیری آنها بررسی می‌شود. این حالت به نام مدل اثرات تصادفی (Randomized Effects Model) شناخته می‌شود.

ابتدا آنالیز واریانس برای مدل اثرات ثابت تک عاملی ارائه می‌شود. در مدل اثرات ثابت، اثرات عامل τ_i معمولاً بصورت انحرافات از میانگین کل تعریف می‌شود.

$$(۲) \quad \sum_{i=1}^m \tau_i = 0$$

در خصوص مجموع میانگین مشاهدات می‌توان نوشت:

$$(۴) \quad \begin{aligned} y_{i.} &= \sum_{j=1}^n y_{ij} & \bar{y}_{i.} &= y_{i.}/n & i &= 1, \dots, m \\ y_{..} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij} & \bar{y}_{..} &= y_{..}/N \end{aligned}$$

در روابط فوق $N = m n$ (مجموع کل مشاهدات) می‌باشد.

در این قسمت می‌خواهیم فرضیه مساوی بودن میانگین‌های مربوط به m سطح عامل را بررسی کنیم. یعنی:

$$(۵) \quad \begin{aligned} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_m = 0 \\ H_1 : \tau_i \neq 0 \end{aligned} \quad \text{حداقل برای یک } i$$

بعبارت دیگر اگر فرضیه H_0 پذیرفته شود، به معنای آن است که وجود اثرات سطحی منتفی است. در این صورت هر مشاهده صرفاً متشکل از میانگین کل μ و خطای ε_{ij} می‌باشد. روش آزمون فرضیه‌های (۵) را آنالیز واریانس گویند. برای این منظور روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(\bar{y}_i - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_i)]^2 \quad (۶)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_i) \quad (۷)$$

جمله آخر در سمت راست عبارت (۷) صفر می‌باشد لذا:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \quad (۸)$$

رابطه (۸) بدین معناست که تغییرپذیری کل در داده‌ها، عبارت است از مجموع مربعات اختلافات بین میانگینهای سطوح عامل مورد مطالعه و میانگین کل و همچنین مجموع مربعات اختلافهای مشاهدات در سطح خاصی از عامل مورد مطالعه از میانگین آن سطح تقسیم کرد. رابطه (۸) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۹) \quad SS_T = SS_{Factor} + SS_E$$

که نمادهای فوق متناظر با رابطه (۸) تعریف می‌گردند.

$$SS_T = \text{مجموع مربعات کل}$$

$$SS_{Factor} = \text{مجموع مربعات عامل مورد مطالعه}$$

$$SS_E = \text{مجموع مربعات خطا}$$

بطور کلی اختلاف بین میانگینهای سطوح عامل و میانگین کل، اختلافهای بین سطوح عامل را اندازه‌گیری می‌کند. ولی اختلافهای بین مشاهدات یک سطح عامل از میانگین آن سطح فقط در اثر خطای تصادفی است.

به این ترتیب اگر SS_{Factor} بزرگتر باشد علت آن وجود اختلاف بین میانگینهای سطوح عامل مورد مطالعه است. یعنی با مقایسه SS_{Factor} با SS_E مشاهده می‌شود که چه مقدار از

تغییرپذیری در اثر تغییر بین سطوح عامل مورد بررسی و چه میزان در اثر خطای تصادفی است.

لازم است ابتدا میانگین مربعات بصورت زیر محاسبه شوند:

$$MS_{Factor} = \frac{SS_{Factor}}{m-1} \quad (10)$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{m(n-1)}$$

اینک می‌توان جدول آنالیز واریانس یک طرفه را ایجاد کرد:

جدول ۳ - محاسبات آنالیز واریانس در حالت یک طرفه

Source of variation	Sum of Sq.	Degree of Freedom	Mean Sq.	F_0
Between factor Levels	SS_{Factor}	$m-1$	MS_{Factor}	$F_0 = \frac{MS_{Factor}}{MS_E}$
Error (within Factor Levels)	SS_E	$m(n-1)$	MS_E	
Total	SS_T	$mn-1$		

چنانچه $F_0 > F_{\alpha, m-1, m(n-1)}$ که مقدار سمت راست از جدول توزیع آماری F استخراج می‌شود، باشد نتیجه می‌گیریم که میانگین‌های سطوح عامل مورد نظر با یکدیگر تفاوت دارند. جهت انجام ساده‌تر محاسبات می‌توان از روابط زیر کمک گرفت:

$$SS_T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{mn} \quad (10)$$

$$SS_{Factor} = \sum_{i=1}^m \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{mn} \quad (11)$$

اینک می‌توان با استفاده از آنالیز واریانس یک طرفه، فرضیه بی‌اثر بودن مقدار MK3 بر میانگین توان کششی لاستیک را آزمایش کرد.

$$SS_T = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{mn}$$

$$= (7)^2 + (8)^2 + \dots + (20)^2 - \frac{(383)^2}{24} = 512.96$$

$$SS_{Factor} = \sum_{i=1}^4 \frac{y_i^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{mn}$$
$$= \frac{(60)^2 + (94)^2 + (102)^2 + (127)^2}{6} - \frac{(383)^2}{24} = 382.79$$
$$SS_E = 512.96 - 382.79 = 130.17$$

جدول ۴ - محاسبات آنالیز واریانس مثال (۱)

منبع تغییرات	جمع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
سطح MK3	۳۸۲/۷۹	۳	۱۲۷/۶	$F_0 = ۱۹/۶۱$
خسارت	۱۳۰/۱۷	۲۰	۶/۵۱	
کل	۵۱۲/۹۶	۲۳		

با توجه به آنکه $F_{0.01,3,20} = 4.94$ است، پس با تغییر درصد MK3 توان کشش لاستیک تغییر می‌کند. مقدار MK3 به ۲۰٪ افزایش می‌یابد و توان کششی لاستیک به میزان متوسط 20Psi می‌رسد. پس از انجام این امر، نمودارهای کنترل مطابق زیر بدست می‌آیند.

نمودار

۲-۳- آنالیز باقیمانده Residual Analysis

در آنالیز واریانس فرض می‌شود که مشاهدات دارای توزیع آماری نرمال مستقل با واریانس یکسان برای هر سطح عامل تحت بررسی هستند. این فرض باید با بررسی باقیمانده‌ها ارزیابی شود. باقیمانده به اختلاف بین مشاهده واقعی y_{ij} و مقدار \hat{y}_{ij} که از یک مرور حداقل مربعات مدل آنالیز واریانس در داده‌های نمونه حاصل گردیده اطلاق می‌شود. در حالت آنالیز واریانس یک طرفه، مقدار \hat{y}_{ij} برابر با میانگین سطح عامل مورد بررسی (\bar{y}_1) است. لذا مقدار باقیمانده برابر است با:

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} \quad (۱۲)$$

در این مرحله می‌توان از دو نمودار به شرح زیر استفاده و پراکندگی بین باقیمانده‌ها را با یکدیگر مقایسه کرد:

۱- نمودار رسم باقیمانده‌ها برحسب سطوح عامل مورد بررسی

۲- نمودار رسم باقیمانده‌ها بر مبنای \bar{y}_i

بمنظور برقراری فرض واریانس یکسان برای هر سطح عامل مورد بررسی، معمولاً از نمودار اول بهره‌گرفته می‌شود. از سوی دیگر در نمودار دوم نباید تغییر باقیمانده‌ها به مقدار \bar{y}_i بستگی داشته باشد.

بمنظور تحلیل فرض مستقل بودن، می‌توان باقیمانده‌ها را برحسب ترتیبی که آزمایش تکرار شده است، بررسی نمود. وجود هر گونه روندی روی این نمودار (مثلاً سلسله‌ای از باقیمانده‌های مثبت و یا منفی، می‌تواند مؤید عدم استقلال مشاهدات باشد) در این قسمت جدولی از باقیمانده‌های مربوط به آزمایش مقدار MK3 در توان کششی لاستیک ارائه می‌شود.

جدول ۵ - محاسبه باقیمانده‌ها در مثال (۱)

درصد MK3	باقیمانده‌ها					
۵	-۳	-۲	۵	۱	۱	۰
۱۰	-۳/۳۷	۱/۳۳	-۲/۶۷	۲/۳۳	-۳/۳۳	۰/۶۷
۱۵	-۳	۱	۲	۰	-۱	۱
۲۰	-۲/۱۷	۳/۸۳	۰/۸۳	۱/۸۳	-۳/۱۷	-۱/۱۷

نمودارهای باقیمانده‌ها برحسب سطوح عامل و بر حسب \bar{y}_i در زیر ارائه شده‌اند:

نمودار

این نمودار بیانگر هیچ‌گونه رفتار خاصی که حاکی از نقض فرض تساوی واریانسها نماید، نمی‌باشند.

۲-۴- بررسی مدل اثرات تصادفی

در این حالت، عامل مورد بررسی دارای سطوح زیادی می‌باشد و تحلیل گر بدنبال تعمیم نتایج به کل جامعه سطوح عامل تحت بررسی است. این وضعیت m سطح از جامعه سطوح عامل، انتخاب می‌شوند. بدلیل انتخاب تصادفی سطوح عامل، می‌توان از نظر آماری نتایج را به جامعه سطوح تعمیم داد.
در این حالت کماکان فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \\ i &= 1, \dots, m \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (13)$$

در رابطه فوق τ_i و ε_{ij} ها متغیر تصادفی مستقل هستند. مدل دارای همان ساختار حالت اثرات ثابت است ولی پارامترهای آن از تعبیر متفاوتی برخوردارند. اگر τ_i دارای واریانس σ_τ^2 باشد آنگاه واریانس هر مشاهده برابر است با:

$$\sigma_y^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma^2 \quad (14)$$

در رابطه (۱۳)، σ^2 و σ_τ^2 را مؤلفه‌های واریانس و مدل (۱۲) را مدل با اثرات تصادفی نامند. در این مدل فرض می‌شود که ε_{ij} ها دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. همچنین فرض می‌شود که τ_i ها دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس σ_τ^2 هستند و τ_i و ε_{ij} ها مستقل از هم می‌باشند. مجرداً خواهیم داشت:

$$(15) \quad SS_T = SS_{Factor} + SS_E$$

در مدل اثرات تصادفی از نسبت:

$$(16) \quad F_0 = \frac{MS_{Factor}}{MS_E}$$

برای آزمایش، فرضیه‌های زیر استفاده می‌شود:

$$(17) \quad \begin{aligned} H_0 : \sigma_\tau^2 &= 0 \\ H_1 : \sigma_\tau^2 &> 0 \end{aligned}$$

اگر H_0 پذیرفته شود، در این صورت تمام سطوح مربوط به عامل مورد بررسی یکسان خواهند بود. در غیر این صورت سطوح عامل مزبور با یکدیگر متفاوت هستند.

مثال ۲:

در کارخانه نساجی X ماشین‌های پارچه‌بافی گوناگونی به تولید پارچه‌های یکسان مشغول هستند. برال مدیریت فرآیند تولید این سؤال مطرح است که آیا تغییرات بین ماشین‌های پارچه‌بافی بر روی توان کششی پارچه‌ها اثر می‌گذارد؟ بمنظور ارزیابی بصورت تصادفی ۴ ماشین انتخاب و توان کششی ۴ نمونه از هر ماشین و اندازه‌گیری شد. اطلاعات حاصله و آنالیز واریانس بشرح زیر می‌باشند:

جدول ۶ – اطلاعات مثال (۲)

ماشین	نمونه‌ها				جمع کل	متوسط
	1	2	3	4		
1	98	97	99	96	390	97.5
2	91	90	93	92	366	91.5

3	96	95	97	95	383	95.8
4	95	96	99	98	388	97
					1527	95.4

جدول ۷ - محاسبات آنالیز واریانس مثال (۲)

Source of Var.	Sum of Sq.	Degree of Freedom	Mean Sq.	F_0
Machines	89.19	3	29.73	
Error	22.75	12	1.9	15.68
Total	111.94	15		

چون $F_{0.01,3,12} = 5.95$ است پس نتیجه گرفته می‌شود که دستگاههای نساجی نمی‌توانند پارچه‌هایی با توان کششی یکسان تولید نمایند.

۲-۵- طرح بلوک بندی تصادفی (Randomized Block Design)

نیاز به طراحی آزمایشهایی که بتوان با کمک آنها، تغییر پذیری در فرآیند (اغتشاش در فرآیند) ناشی از متغیرهای ناخواسته (مزاحم) را کنترل نمود، بعنوان قسمت قابل توجهی در مبحث DOE به حساب می‌آوردند.

فرض کنید در مثال بررسی توان کششی پارچه‌ها، بخواهیم اثر چند نوع ماده شیمیایی را بر روی توان کششی یک نوع پارچه خاصی ارزیابی کنیم. اگر اثر مواد مزبور از یک نوع پارچه به پارچه دیگر فرق نماید، می‌توان چند قطعه پارچه انتخاب و اثر مواد شیمیایی را در شرایط همگنی در ازاء هر قطعه پارچه، تست نمود. این کار منجر به حذف هرگونه اثر ناشی از تغییر نوع پارچه می‌شود. این نوع طراحی آزمایش را بلوک بندی کامل تصادفی گویند.

در حالت کلی برای طرح بندی، تعداد k بلوک انتخاب و در هر بلوک آزمایش به طور کامل تکرار می‌شود. در هر بلوک تعداد m مشاهده (بعبارتی برای هر سطح عامل مورد بررسی یک مشاهده) خواهیم داشت.

بمنظور انجام آنالیز واریانس در طرح بلوک بندی تصادفی، بدنبال بررسی اثر یک عامل دارای m سطح می‌باشیم و آزمایش مزبور در k بلوک انجام می‌شود. در این حالت:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, k \end{matrix} \quad (18)$$

در رابطه اخیر، μ میانگین کل، τ_i اثر مربوط به سطح i ام عامل، β_i اثر مربوط به بلوک j و ε_{ij} خطای تصادفی است (دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2) در این طرح فرضیه مساوی بودن اثرات عامل مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_m = 0 \\ H_1 : \tau_i \neq 0 \quad i \text{ برای حداقل یک } \end{aligned} \quad (19)$$

بمنظور انجام محاسبات تعاریف زیر ارائه می‌شوند:

y_i = مجموع مشاهدات در سطح i ام عامل مورد بررسی

$y_{.j}$ = مجموع مشاهدات در بلوک j ام

$y_{..}$ = مجموع کل مشاهدات

\bar{y}_i = میانگین مشاهدات در سطح i ام عامل

$\bar{y}_{.j}$ = میانگین مشاهدات در بلوک j ام

$\bar{y}_{..}$ = میانگین کل مشاهدات

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k [(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})]^2 \quad (20)$$

و بصورت کلی:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = k \sum_{i=1}^m (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + m \sum_{j=1}^k (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \quad (21)$$

به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$SS_T = SS_{Factor} + SS_E \quad (22)$$

و جدول آنالیز واریانس بشرح زیر خلاصه می‌شود:

جدول ۸ - جدول کلی آنالیز واریانس در حالت بررسی بلوک بندی

Source of Var.	Sum of Sq.	Degree of Freedom	Mean Sq.	F_0
Factor	SS_{Factor}	$m - 1$	MS_{Factor}	$F_0 = \frac{MS_{Factor}}{MS_E}$
Blocks	SS_{Blocks}	$k - 1$	MS_{Blocks}	

Error	SS_E	$(m-1)(k-1)$	MS_E
Total	SS_T	$mk-1$	

در زمینه بحث حاضر، فرض نمایید جهت رنگ آمیزی پارچه‌ها، از چهار شرکت، رنگ یکسانی خریداری شده است. ولی می‌خواهیم اثر چهار نوع رنگ را بر توان کششی یک نوع پارچه ارزیابی کنیم. از یک طرح بلوک بندی تصادفی استفاده شده است و پنج نمونه تهیه شده است. اطلاعات حاصله بشرح جدول زیر می‌باشند.:

جدول ۹ - اطلاعات مثال (۲) در حالت بلوک بندی

نوع رنگ	1	2	3	4	5	y_i	\bar{y}_i
1	1.3	1.6	0.5	1.2	1.1	5.7	1.14
2	2.2	2.4	0.4	2	1.8	8.8	1.76
3	1.8	1.7	0.6	1.5	1.3	6.9	1.38
4	3.9	4.4	2	4.1	3.4	17.8	3.56
$y_{.j}$	9.2	10.1	3.5	8.8	7.6	39.2	1.96
$\bar{y}_{.j}$	2.3	2.53	0.88	2.2	1.9	$(y_{..})$	$(\bar{y}_{..})$

$$SS_T = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{mk}$$

$$= (1.3)^2 + (1.6)^2 + \dots + (3.4)^2 - \frac{(39.2)^2}{20} = 25.69$$

$$SS_{Factor} = \sum_{i=1}^4 \frac{y_i^2}{k} - \frac{y_{..}^2}{mk}$$

$$= \frac{(5.7)^2 + (8.8)^2 + (6.9)^2 + (17.8)^2}{5} - \frac{(39.2)^2}{20} = 18.04$$

$$SS_{Blocks} = \sum_{j=1}^5 \frac{y_{.j}^2}{m} - \frac{y_{..}^2}{mk}$$

$$= \frac{(9.2)^2 + (10.1)^2 + (3.5)^2 + (8.8)^2 + (7.6)^2}{4} - \frac{(39.2)^2}{20} = 6.69$$

$$SS_E = SS_T - SS_{Blocks} - SS_{Factor}$$

$$= 25.69 - 6.69 - 18.04 = 0.96$$

جدول ۱۰ - محاسبات آنالیز واریانس مثال (۲) در حالت بلوک بندی

Source of Var.	Sum of Sq.	Degrees of Freedom	Mean Sq.	F_0
Factor	18.04	3	6.01	75.13
Blocks	6.69	4	1.67	
Error	0.96	12	0.08	
Total	25.69	19		

نتیجه آنالیز واریانس مؤید اثرات معنی دار رنگها بر روی توان کششی پارچه است. مجدداً می توان با آنالیز باقیمانده ها به بررسی نقص مفروضات مدل که می توانند باعث نامعتبر شدن نتایج گردند، پرداخت. روابط زیر در این زمینه مطرح می باشند:

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} \quad (۲۳)$$

$$\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{.i} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

مقدار \hat{y}_{ij} میزان پاسخ متوسط را در ازاء سطح i ام عامل و در بلوک j نشان می دهد.

درشکلهای زیر باقیمانده ها بر اساس نوع رنگ، بر حسب بلوک و بر حسب \hat{y}_{ij} قابل شناسایی هستند.

جدول ۱۱ - باقیمانده های طرح بلوک بندی تصادفی شده.

نوع رنگ	نمونه				
	1	2	3	4	5
1	-0.18	-0.11	0.44	-0.18	0.02
2	0.10	0.07	-0.27	0.00	0.10
3	0.08	-0.24	0.30	-0.12	-0.02
4	0.00	0.27	-0.48	0.30	-0.10

شکل ۶ - باقیمانده‌ها برحسب نوع ماده شیمیایی.

شکل ۷ - باقیمانده‌ها برحسب بلوک.

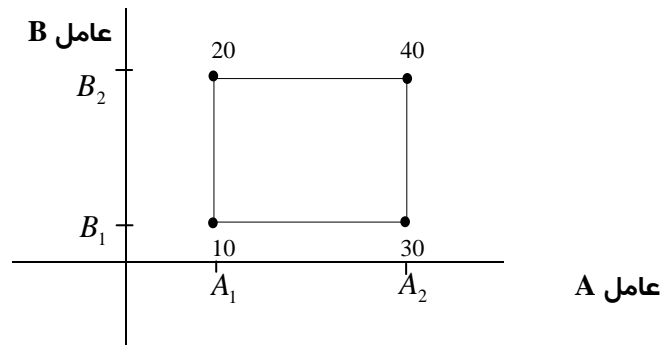
شکل ۸ - باقیمانده‌ها برحسب \hat{y}_{ij} .

نتایج حاصله مؤید موارد زیر می‌باشند:

- ۱- تغییر توان کششی در بلوک (۳) بیشتر از سایر نمونه‌ها می‌باشد.
- ۲- تغییرپذیری توان کششی در ازاء رنگ چهارم در مقایسه با بقیه زیاد می‌باشد. اگر نتایج حاصل از نمودارهای فوق پراهمیت جلوه نمایند، می‌بایستی آزمایشات بیشتری انجام داد تا ارزیابی بیشتری صورت پذیرد.

۳- آزمایشهای فاکتوریل (Factorial Experiment)

در تعداد قابل توجهی از آزمایشهایی که بمنظور شناسایی عیوب و بهبود فرآیند طراحی می‌گردند، معمولاً متغیرهای گوناگونی مؤثر هستند. در این موارد از طرحهای آزمایشی فاکتوریل استفاده می‌شود. در برخی از طرحهای مزبور، تمامی عوامل با هم تغییر می‌کنند. منظور از آزمایش فاکتوریل، آزمایشی است که در هر تکرار آن کلید ترکیبات سطوح عوامل مورد نظر بررسی می‌شوند. مثلاً اگر دو عامل A و B به ترتیب دارای سطوح m و k باشند، آنگاه هر تکرار این آزمایش دارای mk ترکیب خواهد بود. در طرحهای فاکتوریل، اثر یک عامل بصورت میزان تغییر در پاسخ وقتی که سطح عامل مورد نظر تغییر داده شود، تعریف می‌شود. این اثر را اثر اصلی گویند. به شکل زیر توجه شود:



شکل ۹ - طرح دو عامل با دو سطح

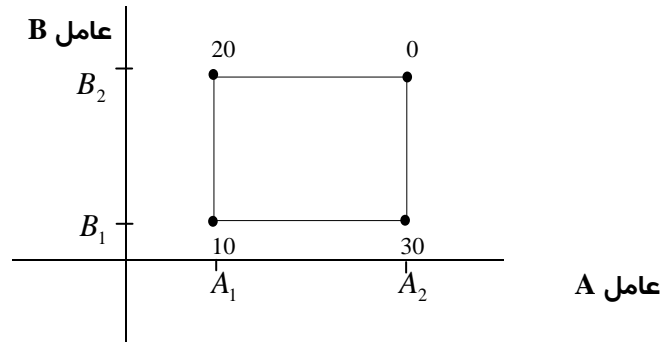
اثر اصلی عامل A عبارت است از اختلاف بین متوسط پاسخ در سطح اول عامل A و سطح دوم آن عامل:

$$A = \frac{30 + 40}{2} - \frac{10 + 20}{2} = 20$$

یعنی با تغییر عامل A از سطح اول به سطح دوم میزان پاسخ به طور متوسط ۲۰ واحد افزایش می‌یابد. بهمین ترتیب در خصوص عامل B خواهیم داشت:

$$B = \frac{20 + 40}{2} - \frac{10 + 30}{2} = 10$$

در پاره‌ای موارد، اختلاف در پاسخ بین سطوح یک عامل به ازاء کلیه سطوح عاملهای دیگر یکسان نیست. در این حالت بین عوامل اثر متقابل (Interaction Effect) وجود دارد. به شکل زیر توجه کنید:



شکل ۱۰ - طرح دو عامل با دو سطح با اثر متقابل

در سطح اول عامل B، اثر عامل A برابر است با:

$$A = 30 - 10 = 20$$

و در سطح دوم عامل B، اثر عامل A برابر است با:

$$A = 0 - 20 = -20$$

به این ترتیب اثر عامل A بستگی به سطح انتخاب شده عامل B دارد. لذا بین A و B اثر متقابل وجود دارد. چنانچه اثر اصلی عامل A محاسبه شود:

$$A = \frac{30+0}{2} - \frac{10+20}{2} = 0$$

به این ترتیب با توجه به اطلاعات، اثر متقابل AB نسبت به اثر اصلی عامل A حاوی اطلاعات مفیدتری است.

مثال ۳: در یکی از صنایع قطعه سازی، آستر رنگ به دو روش روی سطوح فلزی ایجاد می‌گردد:

۱- اسپری (Spraying)

۲- غوطه‌ور کردن (Dipping)

هدف از ایجاد رنگ آستر، بهبود میزان چسبندگی رنگ اصلی است. در کارخانه مزبور سه نوع آستر وجود دارد. مهندسین تولید بدنبال درک تفاوت چسبندگی رنگ ناشی از سه نوع آستر وجود دارد. مهندسین تولید بدنبال درک تفاوت چسبندگی رنگ ناشی از سه نوع آستر هستند. برای این منظور یک آزمایش فاکتوریل با در نظر گرفتن دو روش آسترزنی و سه نوع آستر انجام می‌شود. سه قطعه انتخاب و با هریک از روشها و تحت آسترهای مختلف

آسترزنی شدند. سپس نیروی چسبندگی اندازه گیری شد. به این ترتیب ۱۸ آزمایش تصادفی پدید آمده است.

جدول ۱۱ – اطلاعات مثال (۳)

قطعه	روش آسترزنی				$y_{i..}$
	غوطه وری		اسپری		
1	4, 4.5, 4.3	12.8	5.4, 4.9, 5.6	15.9	28.7
2	5.6, 4.9, 5.4	15.9	5.8, 6.1, 6.3	18.2	34.1
3	3.8, 3.7, 4	11.5	5.5, 5, 5	15.5	27
$y_{.j.}$	40.2		49.6		$89.8 = y_{...}$

در این قسمت لازم است که در خصوص تعمیم آنالیز واریانس به آزمایش فاکتوریل با دو عامل توضیح داده شود. فرض کنید دو عامل مورد نظر A و B باشند. بطوری که عامل A دارای m سطح و عامل B دارای k سطح باشد. اگر آزمایش n مرتبه تکرار شود جدول زیر بدست می آید:

جدول ۱۲ – جدول اطلاعات برای آنالیز واریانس دو عاملی

		Factor B			
		1	2	k
Factor A	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{1k1}, y_{1k2}, \dots, y_{1kn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	
	⋮	
	m	$y_{m11}, y_{m12}, \dots, y_{m1n}$	$y_{mk1}, y_{mk2}, \dots, y_{mkn}$

در این طرح مشاهدات با کمک مدل زیر توصیف می شوند:

$$y_{jk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, k \\ l = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (24)$$

μ = اثر میانگین کل

τ_i = اثر عامل A در سطح i ام

β_j = اثر عامل B در سطح j ام

$(\tau\beta)_{ij}$ = اثر متقابل بین عوامل A و B

ε_{ijl} = خطاهای تصادفی که دارای توزیع نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 می‌باشد.

در این حالت بررسی فرضیه‌های زیر مطرح هستند:

- ۱- اثر عامل A معنی‌دار نیست.
- ۲- اثر عامل B معنی‌دار نیست.
- ۳- اثر متقابل AB معنی‌دار نیست.

جهت انجام محاسبات آنالیز واریانس در حالت اخیر موارد زیر تعریف می‌شوند:

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n y_{ijl} \quad \bar{y}_{i..} = \frac{y_{i..}}{kn} \quad i = 1, \dots, m \quad (25)$$

$$y_{.j.} = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n y_{ijl} \quad \bar{y}_{.j.} = \frac{y_{.j.}}{mn} \quad j = 1, \dots, k \quad (26)$$

$$y_{ij.} = \sum_{l=1}^n y_{ijl} \quad \bar{y}_{ij.} = \frac{y_{ij.}}{n} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, k \end{matrix} \quad (27)$$

$$y_{...} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n y_{ijl} \quad \bar{y}_{...} = \frac{y_{...}}{mkn} \quad (28)$$

به این ترتیب:

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E \quad (29)$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n y_{ijl}^2 - \frac{y_{...}^2}{mkn} \quad (30)$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^m \frac{y_{i..}^2}{kn} - \frac{y_{...}^2}{mkn} \quad (31)$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^k \frac{y_{.j.}^2}{mn} - \frac{y_{...}^2}{mkn} \quad (32)$$

$$SS_{Subtotal} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{mkn} \quad (33)$$

$$SS_{AB} = SS_{Subtotal} - SS_A + SS_B \quad (34)$$

جدول ۱۳ - جدول آنالیز واریانس دو عاملی

Source of Var.	Sum of Sq.	Degree of Freedom	Mean Sq.	F_0
A	SS_A	$m - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{m - 1}$	$F_0 = \frac{MS_A}{MS_E}$
B	SS_B	$k - 1$	$MS_B = \frac{SS_B}{k - 1}$	$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$
Interaction	SS_{AB}	$(m - 1)(k - 1)$	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(m - 1)(k - 1)}$	$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	SS_E	$mk(n - 1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{mk(n - 1)}$	
Total	SS_T	$mkn - 1$		

مجدداً به مثال آزمایش آستر رنگ کارخانه قطعه‌سازی برمی‌گردیم:

$$SS_T = (4)^2 + (4.5)^2 + \dots + (5)^2 - \frac{(89.8)^2}{18} = 10.72$$

$$SS_{\text{نوع آستر}} = \frac{(28.7)^2 + (34.1)^2 + (27)^2}{6} - \frac{(89.8)^2}{18} = 4.58$$

$$SS_{\text{روشن آستر}} = \frac{(40.2)^2 + (49.6)^2}{9} - \frac{(89.8)^2}{18} = 4.91$$

$$SS_{\text{Interaction}} = \frac{(12.8)^2 + (15.9)^2 + (11.5)^2 + (15.9)^2 + (18.2)^2 + (15.5)^2}{3} - \frac{(89.8)^2}{18} - 4.58 - 4.91 = 0.24$$

$$SS_E = 10.72 - 4.58 - 4.91 - 0.24 = 0.99$$

جدول ۱۴ - محاسبات آنالیز واریانس برای مثال (۳)

Source of Var.	Sum of Sq.	Degrees of Freedom	Mean Sq.	F_0
نوع آستر	۴/۵۸	۲	۲/۲۹	۲۸/۶۳
روشهای آسترزنی	۴/۹۱	۱	۴/۹۱	۶۱/۳۸
ارتباط متقابل	۰/۲۴	۲	۰/۱۲	۱/۵
Error	۰/۹۹	۱۲	۰/۰۸	
Total	۱۰/۷۲	۱۷		

با توجه به آنکه $F_{0.05,2,12} = 3.89$ و $F_{0.05,1,12} = 4.75$ می‌باشد، لذا نوع آستر و روش آسترزنی برچسبندگی اثر می‌گذارد و چون $F_{0.05,2,12} > 1.5$ است پس اثر متقابل بین عوامل وجود ندارد. در شکل زیر میانگین نیروی چسبندگی مربوط به هر خانه یا \bar{y}_{ij} بر حسب سطوح مختلف آستر و به ازاء هر روش آسترزنی نشان داده شده است:

نمودار

شکل ۱۱ - نمودار متوسط نیروی چسبندگی بر حسب نوع آستر.

موازی بودن خطوط بیانگر عدم وجود اثر متقابل بین عوامل می‌باشد. همچنین نتیجه گرفته می‌شود که روش اسپری برتر از روش غوطه‌ورکردن می‌باشد. پس بطور کلی برای حداکثر نمودن نیروی چسبندگی، استفاده از آستر نوع دوم و روش اسپری توصیه می‌شود.

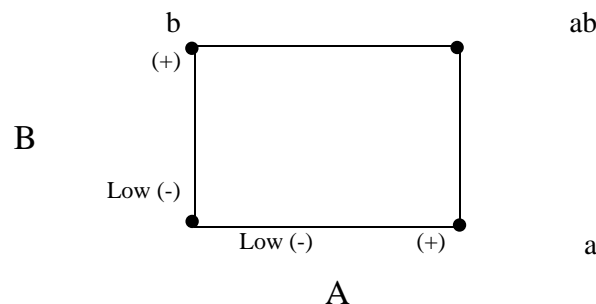
۳-۱- طرح فاکتوریل 2^k

برخی از طرح‌های فاکتوریل می‌توانند در توسعه و بهبود فرآیند مفید واقع شوند. طرح فاکتوریل با k عامل که هر عامل دارای دو سطح است، در زمره این طرح‌ها قرار دارد. به دلیل آنکه هر تکرار کامل آزمایش شامل 2^k آزمایش است، این نوع طرح را طرح فاکتوریل 2^k گویند.

طرح 2^2

این طرح، ساده‌ترین طرح از نوع 2^k است. در این طرح دو عامل مثلاً A و B که هر یک دارای دو سطح می‌باشند، وجود دارد. این سطوح معمولاً سطوح کم (Low) و زیاد (High) عامل نامیده می‌شوند. شکل زیر یک طرح 2^2 را نشان می‌دهد.

شکل ۱۲ - یک طرح 2^2



برای نشان دادن هر یک از آزمایشها، از نمادگذاری مخصوصی استفاده می‌شود. حضور یک حرف به معنای آن است که آزمایش در سطح زیاد آن عامل انجام می‌شود و عدم حضور یک حرف بدین معناست که در آزمایش از سطح کم عامل استفاده می‌شود. آزمایش a بیانگر این است که عامل A در سطح زیاد و عامل B در سطح کم قرار دارد. اگر هر دو عامل در سطح کم باشند، آزمایش با (۱) نشان داده می‌شود. یک طرح 2^2 اثرات مورد نظر عبارتند از دو اثر اصلی A و B و اثر متقابل AB با کمک (۱) ، a ، b ، ab می‌توان اثرات عوامل را برآورد نمود. بمنظور برآورد اثر A میانگین مشاهدات سمت راست مربع وقتی که A در سطح زیاد قرار دارد محاسبه و از این مقدار، میانگین مشاهدات واقع در سمت چپ مربع وقتی که A در سطح کم قرار دارد کسر می‌گردد:

$$A = \frac{a + ab}{2n} - \frac{b + (1)}{2n} = \frac{1}{2n} [a + ab - b - (1)] \quad (35)$$

برای عامل B:

$$B = \frac{b + ab}{2n} - \frac{a + (1)}{2n} = \frac{1}{2n} [b + ab - a - (1)] \quad (36)$$

با تعیین میانگین مشاهداتی که بر روی قطرهای مربع واقع شده‌اند و تعیین اختلاف بین آنها اثر متقابل AB بدست می‌آید:

$$AB = \frac{ab + (1)}{2n} - \frac{a + b}{2n} = \frac{1}{2n} [ab + (1) - a - b] \quad (37)$$

به این ترتیب جدول زیر حاصل می‌شود:

جدول ۱۵ - یک طرح آزمایش 2^2

Run		Factorial Effect		
		A	B	AB
1	(1)	-	-	+
2	a	+	-	-
3	b	-	+	-
4	ab	+	+	+

علامت AB از حاصل ضرب دو علامت مربوط به A و B حاصل می‌شود.

برای محاسبه مجموع مربعات برای A، B و AB خواهیم داشت:

$$SS_A = \frac{[a + ab - b - (1)]^2}{4n} \quad (38)$$

$$SS_B = \frac{[b + ab - a - (1)]^2}{4n} \quad (39)$$

$$SS_{AB} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n} \quad (40)$$

مثال ۴ - روتر (Router) وسیله‌ای است که بر روی صفحات مدارهای چاپی مسیرهای معینی را شیاربرداری می‌کند. در کارخانه‌ای مرتبط با این فرآیند، متوسط فضای شیاربرداری شده فعلی رضایت‌بخش و فرآیند تحت کنترل است.

نمودار

شکل ۱۳ - نمودار کنترل \bar{X} و R برای اندازه شیار

ولی تغییرات زیاد بنظر می‌رسد. تغییرات مزبور منجر به بروز مشکلاتی در مونتاژ می‌شود. با توجه به آنکه فرآیند تحت کنترل می‌باشد، تصمیم گرفته می‌شود که از روشهای DOE برای بررسی فرآیند استفاده شود. در این آزمایش دو عامل در نظر گرفته می‌شوند:

۱- اندازه سرمه‌ها ۱/۱۶ و ۱/۸ اینچ

۲- سرعت ۴۰ و ۸۰ دور در دقیقه

یک طرح 2^2 طراحی می‌شود. میزان تغییرات با کمک شتاب سنج و با سنجش میزان لرزش محورهای (X, Y, Z) اندازه‌گیری شد. برای این کار از ۱۶ صفحه استفاده شد. نتایج در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۱۶ - اطلاعات مثال (ع)

Run	Factors		Vibration				Total	
	A	B						
1	(1)	-	-	18.2	18.9	12.9	14.4	64.4
2	a	+	-	27.2	24	22.4	22.5	96.1
3	b	-	+	15.9	14.5	15.1	14.2	59.7
4	ab	+	+	41	43.9	36.3	39.9	161.7

به این ترتیب می‌توان اثر عوامل را بر آورد نمود:

$$A = \frac{1}{2n} [a + b - b - (1)]$$

$$= \frac{1}{2(4)} [96.1 + 161.7 - 59.7 - 64.4] = 16.64$$

$$B = \frac{1}{2n} [a + ab - a - (1)]$$

$$= \frac{1}{2(4)} [59.7 + 161.7 - 96.1 - 64.4] = 7.54$$

$$AB = \frac{1}{2n} [ab + (1) - a - b]$$

$$= \frac{1}{2(4)} [161.7 + 64.4 - 96.1 - 56.7] = 8.71$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، کلیه اثرات بزرگ می‌باشند. بعنوان مثال وقتی سطح عامل A از کم به زیاد تغییر می‌یابد (اندازه سرمته از ۱/۶ به ۱/۸) میزان متوسط لرزش به مقدار ۱۶/۶۴ دور در دقیقه افزایش می‌یابد. آنالیز واریانس که در جدول زیر خلاصه شده است، به ارزیابی بهتر کمک می‌کند.

جدول ۱۷ - آنالیز واریانس مثال (ع)

Source of Variation	Sum of Sq.	Degrees of Freedom	Mean Sq.	F ₀
Bit Size (A)	1197.226	1	1107.226	185.25
Speed (B)	227.256	1	227.256	38.03
AB	303.631	1	303.631	50.8
Error	71.723	12	5.977	
Total	1709.836	15		

۳-۲- آنالیز باقیماندهها

در طرحهای 2^k مقادیر باقیماندهها را با کمک رگرسیون چند متغیره که متغیرها عوامل DOE در مسأله می‌باشند، می‌توان محاسبه و ارزیابی نمود. در مثال روتر (Router) مدل رگرسیون زیر قابل استفاده است:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \varepsilon \quad (41)$$

X_1 و X_2 عوامل A و B و اثر متقابل AB با کمک $X_1 X_2$ نشان داده می‌شود. برای سطح کم (Low) و سطح زیاد (High) بترتیب مقادیر $X_j = -1$ و $X_j = 1$ منظور می‌شوند. به این ترتیب:

$$\hat{y} = 23.83 + \left(\frac{16.64}{2}\right)X_1 + \left(\frac{7.54}{2}\right)X_2 + \left(\frac{8.71}{2}\right)X_1 X_2$$

در این مدل β_0 (عرض از مبدا) برابر میانگین کل ۱۶ مشاهده و ضرایب β_j برابر با نصف اثر برآورده شده عامل متناظر است. مدل رگرسیون فوق جهت ارائه پیش‌بینی (مثلاً میزان لرزش) در هر نقطه قابل استفاده است. مثلاً اگر سرمته کوچک ($X_1 = -1$) و سرعت کم ($X_2 = -1$) را در نظر بگیرید، میزان لرزش پیش‌بینی شده برابر است با:

$$\hat{y} = 23.83 + \left(\frac{16.64}{2}\right)(-1) + \left(\frac{7.54}{2}\right)(-1) + \left(\frac{8.71}{2}\right)(-1)(-1) = 16.1$$

اینک می‌توان با توجه به مندرجات جدول داده‌ها در اجرای اول، مقادیر باقیمانده را محاسبه کرد:

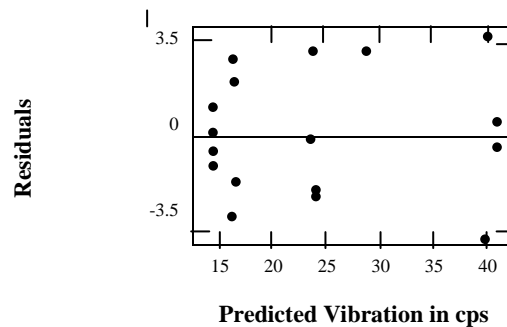
$$e_1 = 18.2 - 16.1 = 2.1$$

$$e_3 = 12.9 - 16.1 = 3.2$$

$$e_2 = 18.9 - 16.1 = 2.8$$

$$e_4 = 14.4 - 16.1 = -1.7$$

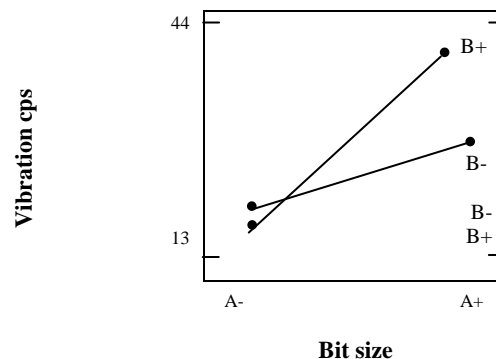
در نمودار زیر باقیمانده‌ها بر حسب \hat{y} رسم شده‌اند:



شکل ۱۴ - نمودار باقیمانده‌ها بر حسب \hat{y}

نتیجه‌گیری

مشاهده می‌شود که هر دو عامل A (اندازه سرمته) و B (سرعت) مهم هستند (اثرات مثبت)، جهت کاهش میزان لرزش می‌توان سطوح این دو عامل را کاهش داد. ولی با معضل غیر قابل قبول میزان تولید مواجه می‌شویم. در این مرحله نمودار اثر متقابل را می‌توان رسم کرد.

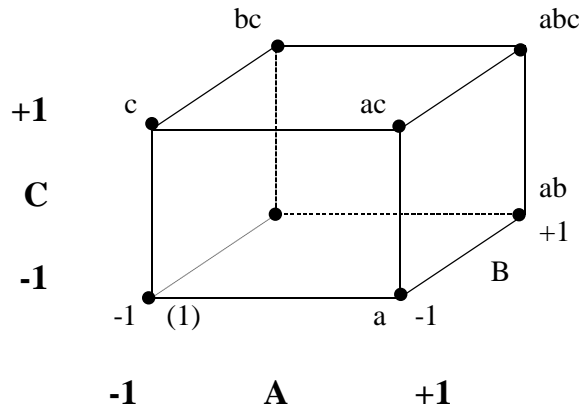


شکل ۱۵ - نمودار اثر متقابل AB

مشاهده می‌شود که اثر مثبت بزرگ برای سرعت در صورت استفاده از سرمته بزرگ در لرزش بروز می‌کند. اگر از سرمته کوچک استفاده شود، استفاده از هر دو سطح سرعت، لرزش کمی را نتیجه می‌دهد. لذا سرعت زیاد و سرمته کوچک انتخاب می‌گردد.

۳-۳- طرح 2^k ($k \geq 3$)

طرحهای فاکتوریل دو عاملی، قابل تعمیم به طرحهایی بیش از دو عامل که هر عامل دارای دو سطح باشد، میسر است. این طرحها را طرحهای فاکتوریل 2^k گویند. مثلاً طرح 2^3 دارای هشت ترکیب مختلف از عوامل است. شکل زیر معرف طرح 2^3 می باشد.



شکل ۱۶ - یک طرح 2^3

شکل ۱۶ - یک طرح 2^3

اینک می توان اثرات اصلی عوامل را محاسبه نمود:

$$A = \frac{1}{4n} [a + ab + ac + abc - b - c - bc - (1)] \quad (42)$$

$$B = \frac{1}{4n} [b + ab + bc + abc - a - c - ac - (1)] \quad (43)$$

$$C = \frac{1}{4n} [c + ac + bc + abc - a - b - ab - (1)] \quad (44)$$

اگر بخواهیم اثر متقابل AB را محاسبه کنیم می بایستی برای حالتی که C در سطح کم و زیاد هستند. اثر AB را بصورت اختلاف اثر A به ازاء دو سطح اثر B محاسبه کرد:

$$AB(C.Low) = \frac{1}{2n} [ab - b] - \frac{1}{2n} [a - (1)] \quad (45)$$

$$AB(C.High) = \frac{1}{2n} [abc - bc] - \frac{1}{2n} [ac - c] \quad (46)$$

پس اثر متقابل AB برابر است با میانگین دو حالت فوق:

$$A = \frac{1}{4n} [ab + (1) + abc + c - b - a - bc - ac] \quad (47)$$

بهمین ترتیب:

$$AC = \frac{1}{4n} [ac + (1) + abc + b - a - c - ab - bc] \quad (48)$$

$$BC = \frac{1}{4n} [bc + (1) + abc + a - b - c - ab - ac] \quad (49)$$

اثر متقابل ABC برابر است با میانگین اختلاف بین اثر متقابل AB در دو سطح C.

$$ABC = \frac{1}{4n} \{ [abc - bc] - [ac - c] - [ab - b] + [a - (1)] \} \quad (50)$$

محاسبات فوق را با کمک جدول علامتها می‌توان بدست آورد:

جدول ۱۸ - طرح آزمایش 2^3

Treatment Combination	Factorial Effect						
	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	-	-	+	-	+	+	-
a	+	-	-	-	-	+	+
b	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	-	-	-	-
c	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	-	-	+	+	-	-
bc	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+

توجه شود که در جدول فوق بصورت ستونی و با توجه به علامت، می‌توان اثرات اصلی و یا متقابل را محاسبه کرد.

مثال ۵ - در یک کارخانه ارزیابی پرداخت سطح یک قطعه فلز مورد توجه است. آزمایش مورد نظر یک طرح 2^3 با عوامل A (میزان تغذیه)، B (عمق برش) و C (زاویه ابزار) است. در این آزمایش $n = 2$ منظور شده است. اطلاعات بشرح زیر می‌باشد:

جدول ۱۹ - طرح آزمایش و اطلاعات مثال (۵)

Runs	عوامل طرح			پرداخت سطح	Total
	A	B	C		
1 (1)	-1	-1	-1	9, 7	16
2 a	1	-1	-1	10, 12	22
3 b	-1	1	-1	9, 11	20
4 ab	1	1	-1	12, 15	27
5 c	-1	-1	1	11, 10	21
6 ac	1	-1	1	10, 13	23
7 bc	-1	1	1	10, 8	18
8 abc	1	1	1	16, 14	30

$$A = \frac{1}{4n} [a + ab + ac + abc - b - c - bc - (1)]$$

$$A = \frac{1}{4(2)} [22 + 27 + 23 + 30 - 20 - 21 - 18 - 16] = 3.375$$

برای محاسبه SS_A و موارد مشابه، مربع مجموع داخل گروه بر $n2^k$ تقسیم می‌شود. مثلاً:

$$SS_A = \frac{(27)^2}{2(8)} = 45.5625$$

در مثال اخیر سایر اثرات بصورت زیر بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$1/625B =$$

$$-./175C =$$

$$1/375AB =$$

$$-./125AC =$$

$$-./625BC =$$

$$1/125ABC =$$

بنابراین عامل A (میزان تغذیه) دارای اثر قابل توجهی است. در جدول زیر آنالیز واریانس مثال پرداخت سطح فلز ارائه شده است:

جدول ۲۰ - محاسبات آنالیز واریانس مثال (۵)

Source of Variation	Sum of Sq.	Degree of Freedom	Mean Sq.	F_0
A	45.5625	1	45.5625	18.69
B	10.5625	1	10.5625	4.33
C	3.0625	1	3.0625	1.26
AB	7.5625	1	7.5625	3.1
AC	0.0625	1	0.0625	0.03
BC	1.5625	1	1.5625	0.64
ABC	5.5625	1	5.5625	2.08
Error	19.5	8	2.4375	
Total	92.9375	15		

بصورت کلی می‌توان نتیجه گرفت که صیقلی بودن سطح را با در نظر گرفتن سطح کم برای میزان تغذیه و سطح کم برای عمق برش، افزایش داد.

آنالیز باقیمانده‌ها

در مثال پرداخت سطح فلز، اثرات مربوط به عوامل A و B و اثر متقابل AB بزرگتر از سایر اثرات می‌باشند. مدل رگرسیون مورد نظر برای پیش‌بینی مقادیر مختلف عبارت است از:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{12} X_1 X_2 \quad (51)$$

در این رابطه X_1 ، X_2 و $X_1 X_2$ بترتیب عوامل A، B و AB می‌باشند. ضرایب رگرسیون β_1 ، β_2 و β_{12} نصف برآوردهای اثرات مربوطه و β_0 میانگین کل است، پس:

$$\hat{y} = 11.0625 + \left(\frac{3.375}{2}\right)X_1 + \left(\frac{1.625}{2}\right)X_2 + \left(\frac{1.375}{2}\right)X_1 X_2$$

بعنوان مثال اگر عوامل A، B و C در سطح کم قرار داشته باشند، مقدار پیش‌بینی برای متغیر پاسخ عبارت است از:

$$\hat{y} = 11.0625 + \left(\frac{3.375}{2}\right)(-1) + \left(\frac{1.625}{2}\right)(-1) + \left(\frac{1.375}{2}\right)(-1)(-1) = 9.25$$

سپس می‌توان مقادیر باقیمانده را در ازاء هر سطح پاسخ محاسبه را ارزیابی نمود.

۳-۴- بلوک بندی (Blocking) و درهم آمیزی (Confounding) طرح 2^k

در برخی موارد در طرحهای فاکتوریل نمی‌توان یک تکرار کامل طرح را انجام داد. در این حالت از روش درهم آمیزی استفاده می‌شود. در این روش، یک آزمایش فاکتوریل در بلوکهای مختلف که هر کدام تعداد آزمایشهای کمتر از یک تکرار کامل آزمایش را دربرمی‌گیرند، انجام می‌شود.

یک طرح 2^2 را در نظر بگیرید. ممکن است بدلیل ضیق زمان، آزمایشها را نمی‌توان بصورت کامل تکرار نمود. لذا در بلوک بصورت زیر تعریف شده‌اند:

Block 1	Block 2
(1)	a
ab	b

با توجه به روابط محاسباتی اثرات عوامل دوگانه A و B مشاهده می‌شود که با توجه به اینکه هر بلوک شامل یک آزمایش با علامت مثبت و یک آزمایش با علامت منفی است تحت تأثیر اثر بلوک‌بندی قرار نمی‌گیرد. با توجه به نحوه محاسبه اثر متقابل AB مشاهده می‌شود که آزمایشهای (1) و ab با علامت مثبت در بلوک 1 و آزمایشهای a و b با علامت منفی در بلوک 2 شده‌اند. لذا اثر بلوک‌بندی و اثر متقابل AB دقیقاً یکسان می‌شوند یعنی اثر AB با بلوکها آمیخته شده است. این روش برای درهم آمیزی هر طرح 2^k در دو بلوک قابل استفاده می‌باشد.

۳-۵- تکرار جزئی طرح 2^k (Fractional Replication Design)

باید توجه داشت که عملاً با افزایش تعداد عوامل در طرحهای 2^k تعداد آزمایشهای مورد نیاز به سرعت افزایش می‌یابند. مثلاً یک طرح 2^5 نیاز به ۳۲ آزمایش دارد. چنانچه برخی از اثرات مراتب بالاتر ناچیز باشند، می‌توان از یک طرح فاکتوریل جزئی (Fractional Factorial Design) بجای طرحی که شامل 2^k آزمایش است، استفاده نمود.

$$\text{جزء } \frac{1}{2} \text{ طرح } 2^k$$

جزء $\frac{1}{2}$ طرح شامل 2^{k-1} آزمایش است و معمولاً آنرا طرح فاکتوریل جزئی می‌نامند. مثلاً طرح 2^{3-1} جزء $\frac{1}{2}$ طرح 2^3 است. جدول زیر علامتهای مربوط به طرح 2^3 را نشان می‌دهد. فرض کنید چهار آزمایش a ، b ، c و abc به عنوان جزء $\frac{1}{2}$ انتخاب شوند.

جدول ۲۱ - طرح جزئی 2^{3-1} برای طرح کامل 2^3

Run	Factorial Effect							
	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
c	+	-	-	+	+	-	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+
ab	+	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	+	-	+	-	+	-	-
bc	+	-	+	+	-	-	+	-
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-

در این مثال طرح 2^{3-1} با انتخاب آزمایشهایی همراه است که ABC دارای اثر مثبت است. به ABC مولد (Generator) این جزء $\frac{1}{2}$ گفته می‌شود. به این ترتیب اثرات اصلی قابل محاسبه هستند:

$$[a - b - c + abc] \frac{1}{2} A =$$

$$[-a + b - c + abc] \frac{1}{2} B =$$

$$[-a - b + c + abc] \frac{1}{2} C =$$

و برای اثرات متقابل:

$$[a - b - c + abc] \frac{1}{2} BC =$$

$$[-a + b - c + abc] \frac{1}{2} AC =$$

$$[-a - b + c + abc] \frac{1}{2} AB =$$

همچنین عنصر I در جدول نیز برای هر چهار آزمایش دارای علامت مثبت است. یعنی $I = ABC$ و از سوی دیگر مشاهده می‌شود که اثرات A و BC، B و AC، C و AB یکسان هستند. موارد اینچنین را هم اثر (Alias) گویند. این پدیده در اثر تکرار کسری بدست می‌آید. در نتیجه این نکته جالب مطرح می‌شود که با انتخاب مناسب جزء طرح می‌توان اثرات اصلی و متقابل مراتب پایین را با اثرات متقابل مراتب بالاتر هم‌اثر نمود. ساختار هم‌اثری این طرح را می‌توان با کمک رابطه معرف $I = ABC$ مشخص نمود. با ضرب هر اثر در رابطه معرف، هم‌اثر آن اثر تعیین می‌شود.

$$A = AI = A \cdot ABC = A^2 BC = BC$$

(ضرب هر عامل در خودش حالت واحد را ایجاد می‌کند)

اگر چنانچه نیمه پایین را در جدول قبل بعنوان جزء $\frac{1}{2}$ در نظر بگیریم در این صورت رابطه معرف $I = -ABC$ است. در این حالت هم‌اثرها عبارتند از:

$$C = -AB$$

$$B = -AC$$

$$A = -BC$$

معمولاً تفاوتی در انتخاب جزء $\frac{1}{2}$ مطرح نمی‌باشد.

کسری که دارای رابطه معرف با علامت مثبت است کسر اصلی و کسر دیگر را کسر متبادل گویند. با کمک طرحهای فاکتوریل جزئی جهت برآورد اثرات نیز استفاده می‌شود. به عنوان مثال، فرض کنید جزء اصلی طرح 2^{3-1} مورد آزمایش واقع شود. اثرات حاصل عبارتند از:

$$I_A = A + BC$$

$$I_B = B + AC$$

$$I_C = C + AB$$

و اگر از جزء متبادل استفاده شود:

$$I'_A = A - BC$$

$$I'_B = B - AC$$

$$I'_C = C - AB$$

اینک می‌توان اثرات اصلی و متقابل را با کمک جدول زیر محاسبه نمود:

اثر i	$\frac{1}{2}(I_i + I'_i)$	$\frac{1}{2}(I_i - I'_i)$
A	$\frac{1}{2}[A + BC - (A - BC)] = BC$	$\frac{1}{2}(A + BC + A - BC) = A$
B	$\frac{1}{2}[B + AC - (B - AC)] = AC$	$\frac{1}{2}(B + AC + B - AC) = B$
C	$\frac{1}{2}[C + AB - (C - AB)] = AB$	$\frac{1}{2}(C + AB + C - AB) = C$

در ادامه بحث مثالی ارائه می‌شود که در دو حالت فاکتوریل کامل و جزیی ارزیابی می‌شود.

مثال ۶: در یک فرآیند شیمیایی، از گاز C_2F_6 به عنوان گاز واکنش کننده استفاده می‌شود. این امکان وجود دارد که بتوان جریان گاز، قدرت الکتریکی در کاتد، فشار مخزن راکتور و فاصله بین آند و کاتد را تغییر داد. در فرآیند مزبور میزان حک‌کاری بوسیله نیتروسیلیکن بررسی می‌شود. برای ارزیابی یک طرح 2^4 ایجاد شده است. بدلیل آنکه اثرات متقابل سه‌گانه و چهارگانه معنی‌دار نمی‌باشند (در این مثال) آنها بصورت تخمینی از خطا مطرح می‌کنیم. سطوح عوامل در جدول زیر آمده است.

جدول ۲۲ – اطلاعات عوامل برای مثال (۶)

سطح	فاصله، A	فشار، B	جریان، C	قدرت
کم (-)	۰/۸	۴۵۰	۱۲۵	۲۷۵
زیاد (+)	۱/۲	۵۵۰	۲۰۰	۳۲۵

در جدول زیر داده‌های مربوط به ۱۶ تکرار طرح ارائه شده است:

جدول ۲۳ – طرح 2^4 برای آزمایش حک‌کاری بوسیله نیتروسیلیکن

Run	A (Gap)	B (Pressure)	C (C_2F_6 Flow)	D (Power)	Etch Rate (A/min)
1	1	1	1	1	550
2	1	1	1	1	669
3	1	1	1	1	604
4	1	1	1	1	650
5	1	1	1	1	633
6	1	1	1	1	642
7	1	1	1	1	601
8	1	1	1	1	635
9	1	1	1	1	1038
10	1	1	1	1	749
11	1	1	1	1	1052
12	1	1	1	1	868

13	1	1	1	1	1075
14	1	1	1	1	860
15	1	1	1	1	1063
16	1	1	1	1	729

برای محاسبه اثرات:

$$A = \frac{1}{8} [a + ab + ac + abc + ad + abd + acd + abcd - (1) - b - c - d - bc - bd - cd - bcd]$$

$$= \frac{1}{8} [669+650+642+635+749+868+860+729-550-604-633-601-1037-1052-1075-1063]$$

$$= -101.625$$

یعنی با افزایش فاصله بین آند و کاتد از ۰/۸ سانتی‌متر به ۱/۲ سانتی‌متر به ۱/۲ سانتی‌متر، میزان حک‌کاری به میزان ۱۰۱/۶۲۵ آنگستروم در دقیقه کاهش می‌یابد. در خصوص سایر اثرات اعداد زیر بدست می‌آید:

A = -101.625	BC = -43.875	ABD = 4.125
B = -1.625	ABC = 15.625	CD = -2.125
AB = -7.875	D = 306.125	ACD = 5.625
C = 7.375	AD = 153.625	BCD = -25.375
AC = -24.875	BD = 0.625	ABCD = -40.125

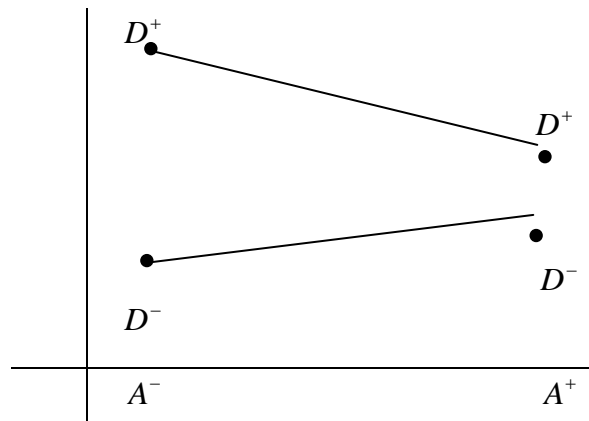
آنالیز واریانس مثال فعلی در جدول زیر خلاصه شده است:

جدول ۲۴ – محاسبات آنالیز واریانس برای مثال (۶)

Source of Var.	Sum of Sq.	Degrees of Freedom	Mean of Sq.	F ₀
A	41310.563	1	41310.563	20.28
B	10.563	1	10.563	<1
C	217.563	1	217.563	<1
D	374850.063	1	374850.063	183.99
AB	248.063	1	248.063	<1
AC	2475.063	1	2475.063	1.21
AD	94402.563	1	94402.563	48.79
BC	7700.063	1	7700.063	3.78
BD	1.563	1	1.563	<1
CD	18.063	1	18.063	<1
Error	10186.815	5	2037.363	
Total	531420.938	15		

در جدول فوق اثرات متقابل سه گانه و چهارگانه درهم ادغام گردیده و به عنوان مربع میانگین خطا در نظر گرفته شده‌اند.

مشاهده می‌شود که چون عامل A دارای میزان اثر $A = -101.625$ است، افزایش فاصله بین کاتد و آند، کاهش میزان حک شده را به همراه خواهد داشت. از طرف دیگر عامل D دارای میزان اثر $D = 306.125$ است. بنابراین استفاده از سطح زیاد (+) قدرت الکتریکی میزان حک‌شده را افزایش می‌دهد. اثر متقابل AD در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱۷ - بررسی اثر متقابل در مثال (۶)

این نمودار نشان می‌دهد که اثر تغییر فاصله بین کاتد و آند (از A^- به A^+) در سطح کم قدرت الکتریکی (D^-) ناچیز است ولی افزایش فاصله بین کاتد و آند (از A^- به A^+) در سطح زیاد قدرت الکتریکی (D^+) کاهش قابل توجهی در میزان حک شده دارد. یعنی میزان حک شده زیاد، به ازاء قدرت الکتریکی زیاد و فاصله کم بین کاتد و آند حاصل خواهد شد. در ادامه این برای باقیمانده‌ها می‌توان از مدل رگرسیون زیر استفاده کرد:

$$\hat{y} = 776.0625 - \left(\frac{101.625}{2}\right)X_1 + \left(\frac{306.125}{2}\right)X_4 - \left(\frac{153.625}{2}\right)X_1X_4$$

اگر هر دو عامل A و D در سطح کم باشند، مقدار پیش‌بینی شده برای حک، عبارت است از:

$$\hat{y} = 776.0625 - \left(\frac{101.625}{2}\right)(-1) + \left(\frac{306.125}{2}\right)(-1) - \left(\frac{153.625}{2}\right)(-1)(-1) = 597$$

و مقادیر باقیمانده برای این حالت عبارتند از:

$$= 550 - 597 = -47 e_1$$

$$= 604 - 597 = 7 e_2$$

$$= 638 - 597 = 36 e_3$$

$$= 601 - 597 = 4 e_4$$

مثال اخیر را می‌توان با کمک یک طرح جزئی فاکتوریل مطرح نمود:
فرض کنید بخواهیم طرح 2^{4-1} را با $I = ABCD$ جهت بررسی اثرات چهار عامل فوق‌الذکر A (فاصله بین کاتد و آند)، B (فشار)، C (میزان جریان C_2F_6)، D (قدرت الکتریکی) بکار گیریم.
این طرح با در نظر گرفتن طرح 2^3 با عوامل A، B و C و قرار دادن $D = ABC$ طراحی می‌شود. طرح حاصل و میزان حک شده در جدول زیر ارائه شده‌اند:

جدول ۲۵ - یک طرح آزمایش جزئی برای مثال (۶)

Run		A	B	C	D = ABC	میزان حک شده
1	(1)	-	-	-	-	550
2	ad	+	-	-	+	749
3	bd	-	+	-	+	1052
4	ab	+	+	-	-	650
5	cd	-	-	+	+	1075
6	ac	+	-	+	-	642
7	bc	-	+	+	-	601
8	abcd	+	+	+	+	729

بر اساس این طرح اثرات متقابل سه گانه هم اثر هستند.

$$A = A \cdot I = A \cdot ABCD = BCD$$

$$B = ACD$$

$$C = ABD$$

$$D = ABC$$

اثرات متقابل دو گانه نیز با یکدیگر هم اثر هستند:

$$AB = ABI = AB \cdot ABCD = CD$$

$$AC = BD$$

$$AD = BC$$

به این ترتیب می‌توان اثرات اصلی و هم اثرهای متناظر با آنها را محاسبه کرد:

$$= A + BCD = \frac{1}{4} (-550 + 749 - 1052 + 650 - 1075 + 642 - 601 + 729) = -127 I_A$$

$$= B + ACD = 4 I_B$$

$$= C + ABD = 11.5 I_C$$

$$= D + ABC = 290.51 I_D$$

با توجه به مقادیر I_A و I_D مشاهده می‌شود که اثرات اصلی A و D بر میزان حک شده کاملاً مؤثرند. (با فرض ناچیز بودن اثرات سه‌گانه)

با افزودن ستونهای AB ، AC و AD به جدول قبل می‌توان اثرات متقابل را نیز برآورد نمود. (علامتهای ستون AB عبارتند از: +, -, -, +, +, -, -, +, +)

$$= AB + CD = \frac{1}{4} (-550 - 749 - 1052 + 650 + 1075 - 642 - 601 + 729) = -10 I_{AB}$$

$$= AC + BD = -25.5 I_{AC}$$

$$= AD + BD = -197.5 I_{AD}$$

اثر I_{AD} بسیار بزرگ است. ساده‌ترین تعبیر آن، وجود اثر متقابل بین A و D بصورت معکوس است و این نکته همان نتیجه طرح فاکتوریل کامل مثال است.

۴- روشهای سطح پاسخ

روشهای سطح پاسخ با بهره‌گیری از فنون آماری بهبود فرآیند را تعقیب می‌کنند. در این فرآیندها چندین متغیر X_1, X_2, \dots, X_k بر خروجی فرآیند (پاسخ) اثر می‌گذارند. هدف اصلی بهینه کردن میزان پاسخ است.

روش رایج در آنالیز سطح پاسخ عبارت است از:

۱- انجام چندین آزمایش که داده‌های قابل اطمینانی را در خصوص فرآیند فراهم سازند.

۲- برآزش یک مدل ریاضی جهت برقراری ارتباط بین ورودیها و خروجی.

۳- استفاده از مدل ریاضی بند (۲) جهت تعیین سطوح بهینه خروجی فرآیند (ورودیها در

چه حدودی تغییر کنند تا حداکثر یا حداقل مقدار برای پاسخ حاصل شود).

در روشهای سطح پاسخ، عملاً با کمک آزمایشهایی پس از شناسایی متغیرهای مهم فرآیند، وضعیت فرآیند در خصوص میزان نزدیکی به نقطه (سطح) بهینه مشخص می‌گردد. سپس در صورتی که فرآیند با سطح بهینه فاصله داشته باشد، با توجه به ارزیابی‌های DOE، تغییرات لازم برای جهت‌دهی آن به سطح بهینه انجام می‌شود.

۵- دیدگاه پروفیسور تاگوچی در DOE

همانگونه که قبلاً نیز اشاره شد، هدف از DOE فراهم آوری شرایط لازم برای تضمین کیفیت می‌باشد. در دهه ۱۹۸۰ پروفیسور گینیچی تاگوچی (Prof. Gene chi Taguchi) روش خاصی را در خصوص DOE مطرح نمود:

۱- طراحی محصولات یا فرآیندها باید بگونه‌ای باشد که آنها نسبت به شرایط محیطی مقاوم باشند.

۲- طراحی و توسعه محصولات بگونه‌ای که آنها نسبت به تغییرات مؤلفه‌های خود مقاوم باشند.

۳- حداقل نمودن تغییرات در نزدیکی نقطه بهینه.

تاگوچی معتقد است که در طراحی توسعه محصول (یا فرآیند) سه مرحله وجود دارد:

۱- طراحی سیستم (System Design)

۲- طراحی پارامتر (Parameter Design)

۳- طراحی تلورانس (Tolerance Design)

در مرحله طراحی سیستم، عملاً از اصول علمی و مهندسی جهت تعیین ساختار موضوع طراحی استفاده می‌شود. در مرحله طراحی پارامتر، می‌بایستی مقادیر خاصی برای پارامترهای سیستم طراحی شوند. عموماً در این مرحله هدف تعیین مقادیر اسمی برای پارامترها می‌باشد، بگونه‌ای که مقدار تغییرات منتقل شده از سوی متغیرهای غیرقابل کنترل به حداقل برسد. در مرحله طراحی تلورانس، برای پارامترهای مشخص می‌شود. هرچه پارامتر مورد نظر اثر کمتری در پاسخ داشته باشد، احتمالاً می‌توان تلورانس زیادتری را برای آن در نظر گرفت. به نظر تاگوچی، تکنیک‌های DOE در مراحل طراحی پارامتر و طراحی تلورانس کاربرد می‌یابند. البته باید توجه داشت که استفاده از DOE در خصوص ایجاد بهترین طراحی محصول یا فرآیند (سیستم) نیز مطرح می‌باشد. واژه بهترین طراحی محصول یا فرآیند به معنای مقاومت و یا بی‌تفاوتی محصول (یا فرآیند) نسبت به عوامل غیرقابل کنترل هنگام استفاده (یا کارکرد) می‌باشد.

۵-۱- یک نمونه از روش طراحی پارامتر تاگوچی

در یک کارخانه از طریق آزمایش بدنبال تعیین روشی برای مونتاژ یک رابط قابل ارتجاع به یک لوله نایلونی می‌باشند تا بتوان عملکرد کششی مناسبی را فراهم آورد. به این ترتیب هدف حداکثر نمودن میزان نیروی کششی است. در شرایط حاکم بر مسأله، چهار فاکتور قابل کنترل (A,B,C,D) که هر یک دارای سه سطح می‌باشند و سه فاکتور غیرقابل کنترل (E,F,G) هر یک دارای دو سطح شناسایی شده‌اند. می‌خواهیم سطوح عوامل قابل کنترل را بگونه‌ای تعیین کنیم که میزان اثر عوامل غیرقابل کنترل بحداقل رسد و حداکثر نیروی کششی فراهم آید. عوامل غیرقابل کنترل، هنگام استفاده از محصول، غیرقابل کنترل هستند ولی آنها را تحت شرایط آزمایش می‌توان کنترل کرد.

۵-۲- طراحی آزمایش (DOE) بر مبنای دیدگاه تاگوچی

براساس روش تاگوچی، یک آزمایش برای عوامل قابل کنترل و یک آزمایش برای عوامل غیرقابل کنترل طراحی می‌گردد. طرحهای مزبور در جدول زیر آمده‌اند:

جدول ۲۶ - طرحهای مربوط به عوامل قابل کنترل و غیرقابل کنترل

(a)					(b)								
Orthogonal Array for the L_9 Controllable Factors					Orthogonal Array for the Controllable Factors L_8								
Run	Variable				Run	Variable							
	A	B	C	D		E	F	E×F	G	E×G	F×G	e	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	1	2	2	1	1	2	2	2
4	2	1	2	3	4	1	2	2	2	2	1	1	1
5	2	2	3	1	5	2	1	2	1	2	1	2	2
6	2	3	1	2	6	2	1	2	2	1	2	1	1
7	3	1	3	2	7	2	2	1	1	2	2	1	1
8	3	2	1	3	8	2	2	1	2	1	1	1	2
9	3	3	2	1	9								

این دو طرح در یک طرح کامل قرار می‌گیرند که منجر به ۷۲ آزمایش می‌گردد. که در جدول زیر ارائه شده است:

جدول ۲۷ - طراحی پارامتر با آرایه‌های درونی و بیرونی

Outer E Array (L_8) F G Inner Array (L_9)														Responses	
Run	A	B	C	D										\bar{y}	SN_L
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	17.525	24.025	
2	1	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	19.475	25.522	
3	1	3	3	3	1	2	1	2	1	2	1	2	19.025	25.335	
4	2	1	2	3	1	2	2	1	2	1	2	2	20.125	25.904	
5	2	2	3	1	2	1	1	2	2	2	1	2	22.825	26.908	
6	2	3	1	2	2	2	1	2	1	2	2	1	19.225	25.326	
7	3	1	3	2	2	1	2	1	2	1	2	2	19.850	25.111	
8	3	2	1	3	2	2	1	2	1	2	2	1	18.338	24.825	
9	3	3	2	1	2	2	2	1	2	1	2	1	21.200	26.152	

۵-۳- آنالیز داده‌ها و نتیجه‌گیری با روش تاگوچی

تاگوچی آنالیز میانگین پاسخ را برای هر یک از آزمایشها پیشنهاد می‌کند. وی همچنین استفاده از نسبتی را تحت عنوان Single - To - Noise Ratio (نسبت هشدار به اغتشاش) برای بررسی میزان تغییرات مطرح می‌کند. سه مورد از نسبتهای مزبور عبارتند از:

$$SN_N = -20 \log(y^{-2}/S^2) \quad \text{Target is better} \quad (52)$$

$$SN_L = -10 \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2}\right) \quad \text{Larger is better} \quad (53)$$

$$SN_S = -10 \log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right) \quad \text{Smaller is better} \quad (54)$$

شاخصهای فوق در مقیاس دسی‌بل معرفی می‌شوند. چنانچه بخواهیم تغییرپذیری را در اطراف مقدار هدف کاهش دهیم از SN_N استفاده می‌شود. اگر سیستم به ازاء میزان پاسخ بزرگ بهینه می‌گردد، از SN_L و چنانچه سیستم به ازاء میزان پاسخ کوچک بهینه گردد، از SN_S استفاده می‌شود. سطوح بهینه مواردی هستند که حداکثر نسبت SN مورد نظر را نتیجه دهند. در مثال اخیر از SN_L برای حداکثر نمودن نیروی کششی استفاده می‌شود. در ستون آخر جدول فوق، مقدار SN_L را برای هر یک از ۹ آزمایش می‌توان ملاحظه نمود. به این ترتیب سطوح عوامل مشخص می‌شود:

$$A = 2$$

$$B = 2$$

$$C = 3$$

$$D = 4$$

تاگوچی معتقد است که با استفاده از نسبت SN نیازی به بررسی اثرات متقابل بین عوامل قابل کنترل و عوامل اغتشاش وجود ندارد.

فهرست منابع و مأخذ:

Montgomery, D.C, Design and Analysis of Experiments, 3rd Ed., John Wiley, New York, 1991. (۱)

Barker, T.B., Quality by Experimental Design, Marcel Decker, New York, 1985. (۲)

Taguchi, G., Introduction to Quality Engineering: Designing Quality in to Products and processes, American Supplier Institute, Dearborn, 1986. (۳)

Montgomery, D.C. and E.A. Peak, Introduction to Linear regression Analysis, John Wiley, New York, 1982. (۴)

Montgomery, D.C., Introduction to Statistical quality Control, 3rd Ed. (۵)